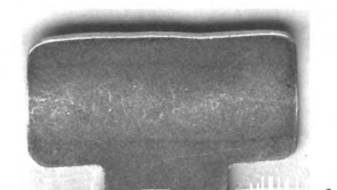

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 08756998 8



Kurzer Leitfaden
für
den Vortrag
der
höhern Analysis, höhern Geometrie
und
analytischen Mechanik

von

Dr. D. C. L. Lehmus,
Professor der Mathematik an der Königlichen vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule und dem Haupt-Bergwerks-Eleven-Institut in Berlin.



Mit einer Figurentafel.

Berlin,
Verlag von Duncker und Humblot.
1842.

Vorrede.

Im Jahr 1839 schrieb der Verfasser einen kurzen Leitfaden für den Vortrag der höhern Analysis und höhern Geometrie und im Jahr 1840 einen solchen Leitfaden für den Vortrag der analytischen Mechanik; beide kamen aber nicht in den Buchhandel, sondern waren zunächst für die Vorträge des Verfassers an der hiesigen Königlichen vereinigten Artillerie- und Ingenieur-Schule bestimmt, welcher derselbe die Manuscripte übergab, und auf deren Kosten der Druck veranlaßt wurde. Eine Veränderung an der genannten Anstalt, wodurch der Vortrag eine größere Ausdehnung erhalten kann, und der Umstand, daß der

*

erstere Leitfaden schon größtentheils vergriffen ist, da der Verfasser beide auch für seine Vorträge an die Berg-Eleven zum Grund legte, gab die Veranlassung der Umarbeitung und erweckte den Entschluß, diese wenigen Bogen zu veröffentlichen.

Berlin, im Februar 1842.

Lehmus.

Inhalt.

Höhere Analysis. §. 1. bis 33.

I. Zeichensprache. Satz von den unbestimmten Coefficienten. Parzialbrüche. Reihen. Begriff von unendlich klein. §. 1. bis 5.

II. Differenzial-Rechnung. §. 6. bis 23.

III. Integral-Rechnung. §. 24. bis 33.

Höhere Geometrie. §. 34. bis 63.

I. Zeichensprache. Allgemeine Begriffe. Gegenstände. §. 34. bis 36.

II. Gleichungen für Linien und Flächen der Elementar-Geometrie. §. 37. bis 40.

III. Allgemeine Gesetze welche durch Algebra und Differenzial-Rechnung herzuleiten sind. §. 41. bis 45.

IV. Allgemeine Gesetze durch Integral-Rechnung begründet. §. 46. bis 48.

V. Kegelschnitte. §. 49. bis 53.

VI. Algebraische Curven von höhern Graden. §. 54. und 55.

VII. Transcendente Curven. §. 56. und 57.

VIII. Von Flächen. §. 58. und 59.

IX. Die Variations-Rechnung. §. 60. bis 63.

Analytische Mechanik.

I. Gegenstände. Zeichensprache. Allgemeine Begriffe und Gesetze. §. 64. und 65.

II. Geradlinigte Bewegung. §. 66. bis 78.

Höhere Analysis.

(§. 1 bis 33.)

I.

Zeichensprache. Satz von den unbestimmten Coefficienten. Parzialbrüche. Reihen.

§. 1.

Bezeichnet P einen auf irgend eine Art aus den Buchstaben a, b, c .... x, y, z gebildeten Ausdruck, so daß der Werth von P abhängig ist von den Werthen, welche man den Buchstaben a, b, c .... x, y, z beilegt, so wird P eine Function von a, b .... y, z genannt, und dieß wird allgemein durch $P_{a, b \ldots y, z}$ oder $P = P_{a, b \ldots y, z}$ angezeigt. Je nach der Form einer solchen Function wird dieselbe algebraisch, rational, irrational, transcendent, ganz, gebrochen und zwar ächt oder unächt gebrochen, genannt. Sind für einige dieser Buchstaben, etwa für c, d .... x bestimmte bleibende Werthe gewählt, während die übrigen a, b, y, z noch ganz unbestimmt und willkührlich zu wählen, gedacht werden, so nennt man erstere c, d, ... x beständig, unveränderlich oder constant; letztere a, b, y, z veränderlich oder variabel und schreibt blos $P_{a, b, y, z}$ oder $P = P_{a, b, y, z}$. Zur Unterscheidung werden dann noch a, b, y, z urvariabel und P abhängig variabel genannt.

Hat man eine Gleichung zwischen zwei oder mehren Veränderlichen u, v, w, denkt sich alle Glieder derselben auf eine Seite gebracht und bezeichnet den entstandenen Ausdruck durch P, so daß die Gleichung selbst durch $P_{u, v, w} = 0$ auszudrücken ist, und stellt sich dann eine der Veränderlichen, etwa u, ent-

wickelt vor, so ist das Resultat durch $u_{v,w}$ oder $u = u_{v,w}$ ausgedrückt und dieser Ausdruck heißt dann eine **unmittelbare** oder **explicite** Function von v, w, welche aus der ursprünglichen verwickelten Gleichung $P_{u,v,w} = 0$ hervorgeht, und in welcher dann v, w als die urvariablen, u als die abhängig variable erscheint.

Hat man **zwei** Gleichungen zwischen drei oder mehrern Variablen, etwa $P_{z,y} = 0$ und $R_{y,x} = 0$, so daß aus der ersteren $z = z_y$, aus der zweiten $y = y_x$ entwickelt zu denken ist, so ist dann mittelbar oder implicit auch z eine Function von x, und dieß wird angezeigt durch $y_{(x)}$ oder $y = y_{(x)}$.

Enthält ein Ausdruck P den Buchstaben h gar nicht, weder unmittelbar noch mittelbar, so sagt man: P ist nach h constant.

Will man anzeigen, daß in eine Function $z = z_{y,x}$ überall wo y steht, a und wo x steht, dafür $x + k$ gesetzt werden soll, so zeigt man dieß durch $[z_{y,x}]_{a,x+k}$ oder auch blos durch $z_{a,x+k}$ an.

§. 2.

Satz von den unbestimmten Coefficienten.

Sollen die beiden ganzen rationalen Functionen von x, nämlich $a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots.$ und $\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 \ldots.$ für **jeden** Werth von x allemal Gleiches liefern, so müssen die Coefficienten gleicher Potenzen von x, Paar und Paar einander gleich sein, also $a = \alpha$; $b = \beta$; u. s. w.

Beide Reihen würden, für $x = 0$, Verschiedenes liefern, wenn nicht $a = \alpha$ wäre, daher muß $a = \alpha$ sein, und es bleibt nur die Bedingung übrig:

$bx + cx^2 + \ldots. = \beta x + \gamma x^2 + \ldots.$ welche, durch x dividirt, in die

$b + cx + \ldots. = \beta + \gamma x + \ldots.$ übergeht, woraus wie oben, folgt, daß auch $b = \beta$ sein muß, u. s. w.

Dieser Satz dient zu mancherlei Umformungen wie folgende Beispiele zeigen, insbesondere ist er für die Verwandlung einer gebrochenen Function in Partialbrüche anwendbar, wovon §. 3. handelt.

Beispiele.

1. Die ächt gebrochene Function von x, $\frac{1}{1-x}$ in eine ganze Function von x umzuformen, d. h. die Coefficienten a, b, c u. s. w. der Bedingung gemäß zu bestimmen, daß $\frac{1}{1-x} = a + bx + cx^2 + dx^3$ u. s. w. werde, für jeden Werth von x.

   Diese Bedingungsgleichung mit $1-x$ multiplicirt, giebt
   $1 = a + (b-a)x + (c-b)x^2 + (d-c)x^3 + \ldots.$
   und also muß
   $a = 1$
   $b - a = 0$
   $c - b = 0$
   $d - c = 0$ u. s. w. werden, woraus
   $a = 1;\ b = 1;\ c = 1;$ u. s. w. also
   $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 +$ u. s. w. folgt.

2. Die ächt gebrochene Function von a, $\frac{1}{a}$ in eine nach den Potenzen von $a-b$ fortschreitende Reihe umzuformen.

   Wird $\frac{1}{b+a-b}$ für $\frac{1}{a}$ geschrieben, so erhält man für $\frac{1}{a}$ die Reihe $\frac{1}{b} - \frac{1}{b^2}(a-b) + \frac{1}{b^3}(a-b)^2$ u. s. w.

3. Die Gleichung $x = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} +$ u. s. w. so umzuformen, daß y als eine ganze Function von x erscheint, d. h. die gegebene Reihe umzukehren.

Wird $y = ax + bx^2 + cx^3 +$ u. s. w. gesetzt, und dieser Ausdruck für x in die gegebene Gleichung substituirt, so ergiebt sich wenn unter (n) das Product aller ganzen Zahlen von 1 bis n verstanden wird

$$y = x + \frac{x^2}{(2)} + \frac{x^3}{(3)} + \frac{x^4}{(4)} + \text{u. s. w.}$$

4. Es soll $\sqrt{a+bx}$ in eine ganze rationale Function von x umgeformt werden.

Aus $\sqrt{a+bx} = \alpha + \beta x + \gamma x^2 +$ u. s. w. ergiebt sich, wenn man diese Gleichung zuvörderst quadrirt, und dann die Coefficienten gleicher Potenzen von x, einander gleich setzt

$$\sqrt{a+bx} = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}x - \frac{b^2}{8a\sqrt{a}}x^2 + \frac{b^3}{16a^2\sqrt{a}}\cdot x^3 \text{ u. s. w.}$$

5. Die unächt gebrochene Function von x, nämlich $\frac{y}{z}$ in welcher z eine ganze rationale Function von x vom n^{ten}, y aber eine solche Function vom $n+m^{ten}$ Grade bezeichnet, in die Summe einer ganzen und einer ächt gebrochenen Function von x zu verwandeln.

Nimmt man die ganze Function vom m^{ten} Grade, also mit $m+1$ unbekannten Coefficienten a, b, c, ... p, giebt der ächt gebrochenen Function den Nenner z, wählt zum Zähler aber eine ganze Function vom $n-1^{ten}$ Grade, also mit n unbekannten Coefficienten A, B, ... H, so liefert die Bedingungsgleichung

$$\frac{y}{z} = a + bx + cx^2 + \ldots + px^m + \frac{A + Bx + \ldots + Hx^{n-1}}{z}$$

wenn nach Multiplication mit z die Coefficienten gleich gesetzt werden, $m+1+n$ Gleichungen zu Bestimmung der $m+1+n$ gesuchten Coefficienten.

Eine dem Zweck entsprechende einfache Division mit z in y führt auch leicht zum Ziel.

§. 3.

Von den Parzialbrüchen.

Erste Aufgabe. Eine ächt gebrochene rationale Function von x, deren Nenner ein Product zweier ganzen Functionen von x ist, in eine Summe zweier Brüche zu zerlegen, deren Nenner diese Factoren sind.

Ist $\frac{u}{y \cdot z}$ der gegebene Bruch, y vom n^{ten}, z vom m^{ten} also u höchstens vom $n+m-1^{ten}$ Grade und wählt man den Zähler v zu y vom $n-1^{ten}$, den w zu z vom $m-1^{ten}$ Grade, so liefert die Bedingungsgleichung

$$\frac{u}{yz} = \frac{v}{y} + \frac{w}{z},$$

nachdem sie in die Form $u = vz + wy$ gebracht ist, nach §. 2. genau $n+m$ Gleichungen zur Bestimmung der $n+m$ gesuchten Coefficienten in v und w.

Zusatz. Ist y vom ersten Grad und a der Werth von x, welcher y gleich Null macht, so wird

$$v = \left(\frac{u_x}{z_x}\right)_a \text{ und dann}$$

$$w = \frac{u - vz}{y}$$

woraus, nach ausgeführter Division, w als ganze Function von x vom $m-1^{ten}$ Grad hervorgeht.

Zweite Aufgabe. Eine ächt gebrochene rationale Function von x, deren Nenner eine ganze m^{te} Potenz einer ganzen Function y von x vom n^{ten} Grade ist, in eine Summe von m Parzialbrüchen zu zerlegen, deren Nenner y^m, y^{m-1} u. s. w. bis y^1 sind.

Bezeichnet z den gegebenen Zähler der zu zerlegenden ächt gebrochenen Function von x und ist also z höchstens von $n \cdot m - 1^{ten}$ Grade, bezeichnen ferner u, v, w .... bis t die gesuchten

Zähler der m Parzialbrüche, und wird jeder derselben vom $n-1^{ten}$ Grade gedacht, so folgen aus der Gleichung

$$\frac{z}{y^m} = \frac{u}{y^m} + \frac{v}{y^{m-1}} + \frac{w}{y^{m-1}} + \ldots + \frac{t}{y}$$

auf die Form

$$z = u + v \cdot y + w y^2 + \ldots + t \cdot y^{m-1}$$

gebracht, nm Coefficienten-Gleichungen zu Bestimmung der nm gesuchten Coefficienten in u, v, w .... bis t.

Zusatz. Ist y vom ersten Grade, und a der Werth von x, welcher y zu Null macht, also u, v, w ..... t vom nullten Grade oder constant, so ergiebt sich

$u = z_a$; ferner $\frac{z - z_a}{y}$ durch z' ausgedrückt,

$v = z'_a$; dann $\frac{z' - z'_a}{y} = z''$ gesetzt,

$w = z''_a$; u. s. w.

Beispiele.

1) $\frac{b+x}{a^2-x^2}$ zerfällt in $\frac{1}{2a}\left[\frac{b-a}{a+x} + \frac{b+a}{a-x}\right]$;

2) $\frac{23+7x}{(3+x)(4+x)}$ in $\frac{2}{3+x} + \frac{5}{4+x}$;

3) $\frac{12+21x+3x^2+5x^3}{(3+x^2)(5+x^2)}$ in $\frac{2+3x}{3+x^2} + \frac{1+2x}{5+x^2}$;

4) $\frac{2-x}{(1+x^3)(3-x)}$ in $\frac{1}{28}\left(\frac{19-3x-x^2}{1+x^3} - \frac{1}{3-x}\right)$;

5) $\frac{38+x-12x^2+x^4}{(5-x^2)^3}$ in $\frac{3+x}{(5-x^2)^3} + \frac{2}{(5-x^2)^2} + \frac{1}{5-x^2}$;

6) $\frac{3+x+x^2}{(1-x)^3}$ in $\frac{5}{(1-x)^3} - \frac{3}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}$;

7) $\frac{2+x^3}{9-x^2}$ in $-x + \frac{1}{6}\left[\frac{29}{3-x} - \frac{25}{3+x}\right]$.

§. 4.

Lehrsatz.

In jeder nach den steigenden ganzen Potenzen von x fortlaufenden Function

$$a + bx + cx^2 + \ldots . + px^n + qx^{n+1} \ldots . + rx^m + \ldots .$$

wird irgend ein Glied dieser Reihe, etwa $p \cdot x^n$, seinem absoluten Werth nach, größer als die absolute Summe S aller folgenden Glieder, sobald x kleiner wie $\frac{p}{p+r}$ gewählt wird, und keiner der Coefficienten in S größer wie r ist.

Aus $S = qx^{n+1} + \ldots . + rx^m \ldots .$ folgt der Voraussetzung gemäß

$$S \leqq rx^{n+1} [1 + x + x^2 \ldots .] \text{ und hieraus}$$

nach §. 2. Beispiel 1.

$$\frac{1}{1-x} \geqq \frac{S}{rx^{n+1}} \text{ folglich auch}$$

$$\frac{px^n}{1-x} \geqq \frac{pS}{rx}; \text{ oder } \frac{px^n}{S} \geqq \frac{p(1-x)}{rx}.$$

Für alle die Werthe von x also, welche $\frac{p(1-x)}{rx} > 1$ machen, d. h. für $x < \frac{p}{p+r}$ wird

$$\frac{px^n}{S} > 1; \text{ also } px^n > S.$$

Es giebt daher, so bald r einen endlichen Werth hat, immer so kleine Werthe für x, die irgend ein Glied einer solchen Reihe, seinem absoluten Werth nach, etwa px^n, größer machen als die absolute Summe S aller folgenden Glieder, um so mehr größer als die wirkliche Summe S^1; ist daher $px^n \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$, so ist auch für so kleine Werthe von x, $px^n + S^1 \begin{Bmatrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{Bmatrix}$ und

man drückt dieß dadurch aus, daß man sagt: das Zeichen des Gliedes px^n dominirt dann über das Ergebniß aller folgenden Glieder.

§. 5.

Begriff von: Unendlich Klein.

Versteht man unter einer **unendlich kleinen Zahl** eine solche die so klein ist, daß sie in **Ziffern nicht mehr angegeben werden kann**, also der **Null** zunächst **anliegt**, und demnach für jede Rechnung in Zahlen als **Summand** ohne allen Einfluß ist, so ist, wenn in einer solchen Reihe wie $a + bx + \ldots. + px^n + qx^{n+1} + \ldots.$ unter x eine unendlich kleine Zahl verstanden wird, jeder der Coefficienten aber eine endliche positive oder negative Zahl bezeichnet, der Einfluß jedes folgenden Gliedes auf die Summe S der ganzen Reihe, in Vergleich mit dem des vorhergehenden Gliedes für jede Rechnung gleich Null zu setzen, denn wollte man annehmen der Quotient von qx^{n+1} durch px^n, d. h. $\frac{qx}{p}$ wäre eine zwar sehr kleine Zahl h, aber noch nicht unendlich klein, so wäre auch $x = \frac{ph}{q}$ noch eine angebbare, also noch nicht unendlich kleine Zahl, welche Folgerung der Voraussetzung, daß x eine unendlich kleine Zahl bezeichnet, widerspricht. Bei dieser Voraussetzung ist demnach vollkommen, ohne allen Fehler in jeder Rechnung $S = a$, und wenn $a = 0$ ist, $S = bx$ als unendlich klein der ersten Ordnung; wenn aber $a = 0$ und $b = 0$ ist, $S = cx^2$ als unendlich klein der zweiten Ordnung u. s. w. zu setzen, insofern diese Unendlich Kleinen von irgend einer Ordnung bei dem Gegenstand der Rechnung noch auf irgend eine Art zu berücksichtigen bleiben.

II.

Differenzial- oder Ableitungs-Rechnung.

§. 6.

Die Taylorsche Reihe für eine Urvariable.

Es bezeichne y irgend eine Function von x; man verlangt y_{x+k} in eine nach den Potenzen von k fortschreitende Reihe verwandelt, deren Coefficienten blos von x, nicht von k, abhängig sind, d. h. man sucht A_x, B_x, C_x u. s. w. der Bedingung entsprechend, daß

$$y_{x+k} = A + B \cdot k + Ck^2 + \ldots.$$

werde.

Es erhellet sogleich, daß, weil auch für k = 0 Gleiches entstehen soll, A = y sein muß, und dann folgt, aus derselben Bedingung

$$B = \left[\frac{y_{x+k} - y_x}{k}\right]_{k=0};$$

es ergiebt sich daher B durch folgende Operationen: man setze in y an jede Stelle wo x steht, dafür x + k, subtrahire hiervon die ursprüngliche Function y selbst, dividire dann den Rest durch k und setze, nachdem dieses ausgeführt ist, Null für k. Diese, der so eben vorgeschriebenen Folge nach, vorzunehmenden Operationen, bezeichnet man dadurch daß man der ursprünglichen Function y den Buchstaben ∂ vorsetzt, und das Resultat ∂y_x wird dann die erste Ableitung von y nach x oder auch: der erste Differenzial-Coefficient genannt. Man hat also nun

$$y_{x+k} = y_x + \partial y_x \cdot k + \text{u. s. w.}$$

und also, wenn ∂y_x jetzt, als die ursprüngliche Function, in eine solche Reihe verwandelt werden sollte

$$[\partial y_x]_{x+k} = \partial y_x + \partial(\partial y_x)_x \cdot k + \ldots.$$

wo $\partial^2 y_x$ für $\partial(\partial y_x)_x$ geschrieben und die zweite Ableitung von y nach x genannt wird. Eben so folgt, wenn nun $\partial^2 y_x$ dieser Umformung unterworfen werden soll

$$[\partial^2 y_x]_{x+k} = \partial^2 y_x + \partial(\partial^2 y_x)_x \cdot k + \ldots.$$

und es wird $\partial(\partial^2 y_x)_x$ durch $\partial^3 y_x$ angezeigt, und die dritte Ableitung von y nach x genannt, u. s. w.

Die Bestimmung der übrigen Coefficienten C, D, u. s. w. erfolgt nun leicht allmählig aus der Betrachtung, daß y_{x+k} in y_{x+2k} sowohl dadurch übergeht, daß man in y_{x+k} für k, 2k als auch dadurch, daß man in y_{x+k} für x, x+k setzt. Hierdurch entsteht die Gleichung

$$y_x + \partial y_x \cdot 2k + C_x (2k)^2 + \ldots. = y_{x+k} + [\partial y_x]_{x+k} \cdot k + C_{x+k} \cdot k^2 \ldots.$$

und aus ihr, wenn man obige Werthe substituirt und zugleich $C_x + \partial C_x \cdot k + \ldots.$ für C_{x+k} setzt, durch Gleichsetzung der Coefficienten von k^2, nach §. 2;

$$C = \frac{1}{2} \cdot \partial^2 y_x .$$

Ganz auf demselben Wege folgt, die Zeichensprache in §. 2, Beispiel 3. eingeführt

$$D = \frac{1}{(3)} \cdot \partial^3 y_x$$

und dann durch eine vollständige Induction der n^{te} Differenzial-Coefficient $= \frac{1}{(n)} \cdot \partial^n y_x$.

Es ist demnach

$$y_{x+k} = y_x + \partial y_x \cdot k + \partial^2 y_x \cdot \frac{k^2}{(2)} + \partial^3 y_x \cdot \frac{k^3}{(3)} + \ldots.$$

und diese Reihe heißt die Taylorsche.

§. 7.

Die Maclaurinsche Reihe.

Setzt man in die Taylorsche Reihe Null für x und x für k, so entsteht die Maclaurinsche, nämlich:

$$y_x = (y_x)_0 + (\partial y_x)_0 \cdot x + (\partial^2 y_x)_0 \cdot \frac{x^2}{(2)} + \ldots.$$

welche im Allgemeinen jede Function von x in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt, und nur in den Fällen ihre Brauchbarkeit verliert, in welchen $(y_x)_0$ oder eine der Ableitungen von y nach x, für $x = 0$, die Form $\frac{1}{0}$ annimmt.

Setzt man in die Taylorsche Reihe a für x und $x - a$ für k, so entsteht die verallgemeinte Maclaurinsche Reihe

$$y_x = y_a + [\partial y_x]_a \cdot (x - a) + [\partial^2 y_x]_a \cdot \frac{(x-a)^2}{(2)} + \ldots.$$

in welcher a beliebig, also auch bestimmten Zwecken entsprechend, zu wählen ist.

§. 8.

Die Taylorsche Reihe für zwei Urvariable.

Ist $z = z_{x,y}$ so ist dann

$$z_{x+k,\,y} = z + \partial z_x \cdot k + \partial^2 z_x \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots.$$

und setzt man nun in z überall wo y steht, $y + r$, so wird das erste Glied rechts des Gleichheitszeichens

$$= z + \partial z_y \cdot r + \partial^2 z_y \cdot \frac{r^2}{(2)} + \ldots.$$

das zweite

$$= \partial z_x \cdot k + \partial(\partial z_x)_y \cdot rk + \partial^2(\partial z_x)_y \cdot \frac{r^2 k}{(2)} + \ldots.$$

das dritte

$$= \partial^2 z_x \cdot \frac{k^2}{(2)} + \partial(\partial^2 z_x)_y \cdot \frac{r \cdot k^2}{(2)} + \partial^2(\partial^2 z_x)_y \cdot \frac{r^2 k^2}{(2)\cdot(2)} + \ldots.$$

u. s. w. und es entsteht die **Taylorsche** Reihe für zwei unabhängige Urvariable x, y nämlich

$$z_{x+k,\,y+r} = z + \partial z_x \cdot k + \partial z_y \cdot r + \partial^2 z_x \cdot \frac{k^2}{(2)} + \partial(\partial z_x)_y \cdot kr$$

$$+ \partial^2 z_y \cdot \frac{r^2}{(2)} + \partial^3 z_x \cdot \frac{k^3}{(3)} + \partial^2(\partial z_x)_y \cdot \frac{kr^2}{(2)} + \partial(\partial^2 z_x)_y \cdot \frac{k^2 r}{(2)}$$

$$+ \partial^3 z_y \cdot \frac{r^3}{(3)} + \ldots\ldots$$

Läßt man zuerst y um r und dann x um k wachsen, so entsteht dasselbe, nur $\partial(\partial z_y)_x$ für $\partial(\partial z_x)_y$; $\partial^2(\partial z_y)_x$ für $\partial(\partial^2 z_x)_y$ u. s. w. gesetzt, welche Ausdrücke demnach einerlei anzeigen, und man schreibt daher wenn $z = z_{x,y}$, m mal hintereinander nach x und dann das Resultat noch n mal hintereinander nach y abgeleitet werden soll, weil die Ordnung willkührlich ist, entweder $\partial^{m,n} z_{x,y}$ oder $\partial^{n,m} z_{y,x}$, und nur für $\partial^{1,1} z_{x,y}$ kann auch, ohne Irrung, blos $\partial^2 z_{x,y}$ gesetzt werden. Diese Coefficienten heißen: **Parzial-Differenzial-Coefficienten.** Für drei und mehre Urvariable läßt sich die **Taylorsche** Reihe auf demselben Wege bilden.

In diesen Darstellungen wird für k als den Unterschied zweier unbestimmten Werthe von x, häufig als bezeichnender dx geschrieben, und **Differenz** x gelesen; eben so dy für r; dz für $z_{x+k,\,y+r} - z_{x,y}$.

§. 9.

Gesetze des Ableitens.

Versteht man unter n einen nach x constanten Ausdruck, unter y und z Functionen von x, bezeichnet S die Summe, P das Product, Q den Quotienten beider Functionen, so ist

1) $\partial x_x = 1$
2) $\partial n_x = 0$
3) ∂S_x oder $\partial(y \pm z)_x = \partial y_x \pm \partial z_x$

4) ∂P_x oder $\partial(y \cdot z)_x = y \partial z_x + z \cdot \partial y_x$

5) ∂Q_x » $\partial\left(\frac{y}{z}\right)_x = \frac{z \partial y_x - y \partial z_x}{z^2}$ und

6) $\partial(y^n)_x = n \cdot y_{n-1} \cdot \partial y_x$

Es folgt nämlich aus $w = n \cdot x$ sogleich

$w_{x+k} = nx + nk$ folglich weil auch

$w_{x+k} = w + \partial w_x \cdot k + \partial^2 w_x \cdot \frac{k^2}{(2)} \ldots$ ist,

nach §. 2.

∂w_x oder $\partial(nx)_x = n$ also, für $n = 1$,.

1) $\partial x_x = 1$; ferner

$\partial^2 w_x = 0$; oder

2) $\partial n_x = 0$; dann aus

$S = y \pm z$

$S_{x+k} = y_{x+k} \pm z_{x+k}$ oder

$S + \partial S_x \cdot k + \ldots = y + \partial y_x \cdot k \ldots \pm z \pm \partial z_x \cdot k \ldots$

und hieraus nach §. 2.

3) ∂S_x oder $\partial(y \pm z)_x = \partial y_x \pm \partial z_x$.

Eben so, aus $P = y \cdot z$

$P_{x+k} = y_{x+k} \cdot z_{x+k}$ oder

$P + \partial P_x \cdot k \ldots = (y + \partial y_x \cdot k \ldots)(z + \partial z_x \cdot k \ldots)$

$= yz + (y \partial z_x + z \partial y_x) k + \ldots$

ebenfalls nach §. 2.

4) ∂P_x oder $\partial(yz)_x = y \partial z_x + z \partial y_x$.

Wird die Gleichung $Q = \frac{y}{z}$ in die Form $y = Q \cdot z$ gebracht, so ist nach 4.

$\partial y_x = Q \cdot \partial z_x + z \cdot \partial Q_x$ also $\frac{y}{z}$ für Q gesetzt und ∂Q_x entwickelt.

5) $\partial\left(\frac{y}{z}\right)_x = \frac{z \partial y_x - y \partial z_x}{z^2}$.

Bezeichnet endlich R die Potenz y^n, so wird

$R_{x+k} = [y_{x+k}]^n = [y + \partial y_x \cdot k + \ldots .]^n$ oder

$R + \partial R_x \cdot k \ldots . = y^n + n y^{n-1} \cdot \partial y_x \cdot k \ldots .$

und hieraus nach §. 2.

6) $\partial (y^n)_x = n \cdot y^{n-1} \cdot \partial y_x$.

Beispiele.

1) $\partial [ax^2 + bx^3]_x = 2ax + 3bx^2$;

2) $\partial \left(\frac{1+x}{1-x}\right)_x = \frac{2}{(1-x)^2}$;

3) $\partial (\sqrt{2+3x})_x = \frac{3}{2\sqrt{2+3x}}$;

4) $\partial^2 [2x + 5x^2]_x = 10$;

5) $\partial^2 \left(\frac{x}{1+x}\right)_x = -\frac{2}{(1+x)^3}$;

6) $\partial^3 \left[\sqrt[3]{x}\right]_x = \frac{10}{27x^2 \cdot \sqrt[3]{x^2}}$;

7) $\left[\partial^2 \left[\frac{3+x}{3-x}\right]_x\right]_{-3} = \frac{1}{18}$;

8) $\left[\partial^2 \left[xy^2 + x^2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}\right]_{x,y}\right]_{3,4} = \frac{1492}{125}$;

9) $\left[\partial^{3,2} [2x^3 y + 3x^4 y^{-1}]_{x,y}\right]_{\frac{4}{3},4} = 3$.

§. 10.

Fernere Hauptgesetze der Differenzial-Rechnung.

1. Ist die Gleichung zwischen y und x, $P_{x,y} = 0$ gegeben und aus ihr ∂y_x bestimmt, so ist dann $\partial x_y = \frac{1}{\partial y_x}$.

2. Sind die beiden Gleichungen $P_{z,y} = 0$ und $Q_{y,x} = 0$ gegeben, und aus der ersten ∂z_y, aus der zweiten ∂y_x bestimmt, so ist dann $\partial z_{(x)} = \partial z_y \cdot \partial y_x$.

3. Ist $P_{y,z} = 0$ gegeben, aber $y = y_x$ und $z = z_x$ so daß P den Buchstaben x als Urvariable nicht unmittelbar (explicit), sondern mittelbar (implicit) enthält, so ist

$$\partial P_{(x)} = \partial P_y \cdot \partial y_x + \partial P_z \cdot \partial z_x$$

also wenn $y = x$ ist

$$\partial P_{(x)} = \partial P_x + \partial P_z \cdot \partial z_x .$$

Es ist nämlich ad 1) $dy = \partial y_x \cdot dx + \ldots.$ und

$$dx = \partial x_y \cdot dy + \ldots. \text{ also}$$
$$dx = \partial x_y \cdot [\partial y_x \cdot dx + \ldots.] + \ldots.$$

woraus $\partial x_y \cdot \partial y_x = 1$ also $\partial x_y = \frac{1}{\partial y_x}$ folgt.

Ferner ist ad 2)

$$dz = \partial z_y \cdot dy + \ldots.$$
$$dy = \partial y_x \cdot dx + \ldots.$$

und wenn man sich aus beiden gegebenen Gleichungen y eliminirt vorstellt, der Eliminations-Gleichung $R_{z,x} = 0$ entsprechend

$$dz = \partial z_{(x)} \cdot dx + \ldots.$$

und eliminirt man aus diesen drei Gleichungen dz und dy, so folgt aus der Gleichsetzung der Coefficienten von dx sogleich:

$$\partial z_{(x)} = \partial z_y \cdot \partial y_x .$$

In Beziehung auf 3) hat man

$$dP \text{ sowohl} = \partial P_y \cdot dy + \partial P_z \cdot dz + \ldots.$$
$$\text{als auch} = \partial P_{(x)} \cdot dx + \ldots. ; \text{ aber}$$
$$dy = \partial y_x \cdot dx + \ldots. \text{ und}$$
$$dz = \partial z_x \cdot dx + \ldots.$$

aus welchen Gleichungen, wenn dy und dz eliminirt und die beiden Werthe für dP gleich gesetzt werden, sich

$$\partial P_{(x)} = \partial P_y \cdot \partial y_x + \partial P_z \cdot \partial z_x \text{ ergiebt.}$$

Leicht folgt nun auch:

$$\partial^2 x_y = -\frac{\partial^2 y_x}{\partial y_x^3}\,;\ \partial^2 z_{(x)} = \partial z_y \cdot \partial^2 y_x + \partial y^2{}_x \cdot \partial^2 z_y\,;$$ u. s. w.

Beispiele.

1. Ist $y = 3x - 2x^3$ so folgt

$$[\partial x_y]_1 = -\frac{1}{3}\,;\ \frac{1+\sqrt{3}}{6}\,;\ \frac{1-\sqrt{3}}{6}$$

$$[\partial^2 x_y]_0 = 0\,;\ -\frac{\sqrt{6}}{36}\,;\ +\frac{\sqrt{6}}{36}\,.$$

2. Sind die beiden Gleichungen $y = 5 + 2x^2$; $z^2 + 3z = x$ gegeben, so folgt $[\partial y_z]_3 = 648$; $[\partial^2 y_z]_0 = 36$.

3. Aus den beiden Gleichungen $2z^3 - 3z - x = 0$ und $5z^2 - 2z - y = 0$ folgt

$$[\partial y_x]_0 = \frac{2}{3}\,;\ \frac{5\sqrt{6}-2}{6}\,;\ \frac{-5\sqrt{6}-2}{6}\,.$$

§. 11.

Ableitungen trigonometrischer Functionen.

Bezeichnet x die Länge eines Kreisbogens zum Halbmesser 1, so ist

$$\partial(\mathrm{Sin}\,x)_x = \mathrm{Cos}\,x\,;\ \partial(\mathrm{Cos}\,x)_x = -\mathrm{Sin}\,x\,;\ \partial(\mathrm{tg}\,x)_x = \mathrm{Sec}^2 x\,;$$

$$\partial(\mathrm{Cotg}\,x)_x = -\mathrm{Cosec}^2 x\,;\ \partial(\mathrm{Sec}\,x)_x = \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{Sec}\,x\,;\ \partial(\mathrm{Cosec}\,x)_x = -\mathrm{Cotg}\,x\,\mathrm{Cosec}\,x\,.$$

Wird nämlich Sin x durch y ausgedrückt, so folgt

$$y_{x+k} - y_x = \partial y_x \cdot k + \partial^2 y_x \cdot \frac{k^2}{(2)} + \dots = \mathrm{Sin}(x+k) - \mathrm{Sin}\,x$$

$$= 2\,\mathrm{Sin}\,\frac{k}{2} \cdot \mathrm{Cos}\left(x + \frac{k}{2}\right);$$ also

$$\partial y_x + \partial^2 y_x \cdot \frac{k}{2} + \dots = \frac{2\,\mathrm{Sin}\,\frac{k}{2}}{k} \cdot \mathrm{Cos}\left(x + \frac{k}{2}\right);$$

folglich, wenn der Werth, welchen der constante Factor $\frac{2\,\mathrm{Sin}\frac{k}{2}}{k}$ für $k = 0$ annimmt, durch p ausgedrückt wird,

$$\partial y_x = \partial(\mathrm{Sin}\,x)_x = p\,\mathrm{Cos}\,x.$$

Aus $\mathrm{Sin}^2 x + \mathrm{Cos}^2 x = 1$ folgt dann weiter

$2\,\mathrm{Sin}\,x \cdot p\,\mathrm{Cos}\,x + 2\,\mathrm{Cos}\,x\,\partial(\mathrm{Cos}\,x)_x = 0$ und hieraus

$\partial(\mathrm{Cos}\,x)_x = -p\,\mathrm{Sin}\,x$; folglich

$\partial^2(\mathrm{Sin}\,x)_x = -p^2\,\mathrm{Sin}\,x$;

$\partial^3(\mathrm{Sin}\,x)_x = -p^3\,\mathrm{Cos}\,x$;

$\partial^4(\mathrm{Sin}\,x)_x = +p^4\,\mathrm{Sin}\,x$;

$\partial^5(\mathrm{Sin}\,x)_x = +p^5 \cdot \mathrm{Cos}\,x$ u. s. w.

daher nach §. 7.

$$\mathrm{Sin}\,x = px - \frac{p^3}{(3)}x^3 + \frac{p^5}{(5)} \cdot x^5 \ldots.$$

Insofern nun aber p von x unabhängig ist, es also ganz gleichgültig bleibt, welcher Werth von x zur Bestimmung von p in Anwendung gebracht wird, für $x < \frac{\pi}{2}$ aber, $\mathrm{tg}\,x > x$ und $\mathrm{Sin}\,x < x$, also auch $\mathrm{Sin}\,x > x(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$ oder

$$(p-1)x + \left[\frac{1}{2} - \frac{p^3}{(3)}\right]x^3 + \ldots. = \text{positiv und}$$

$$\mathrm{Sin}\,x - x \text{ oder } (p-1)x - \frac{p^3}{(3)}x^3 \ldots. = \text{negativ sein muß,}$$

so erhellet nach §. 5, daß für $x =$ unendlich klein, $p - 1$ weder positiv noch negativ sein kann, also $= 0$ sein muß, woraus $p = 1$ und dann $\partial(\mathrm{Sin}\,x)_x = \mathrm{Cos}\,x$; $\partial(\mathrm{Cos}\,x)_x = -\mathrm{Sin}\,x$ folgt. Die übrigen vier Formeln entspringen dann leicht aus §. 9, wenn die Gesetze $\mathrm{tg}\,x \cdot \mathrm{Cos}\,x = \mathrm{Sin}\,x$; $\mathrm{Cotg}\,x\,\mathrm{Sin}\,x = \mathrm{Cos}\,x$; $\mathrm{Sec}\,x\,\mathrm{Cos}\,x = 1$ und $\mathrm{Cosec}\,x \cdot \mathrm{Sin}\,x = 1$ zum Grund gelegt werden.

§. 12.

Bezeichnet y irgend eine Function von x, so hat man nun nach §. 10. 2. folgende sechs Formeln:

1) $\partial(\mathrm{Sin}\, y)_{(x)} = \mathrm{Cos}\, y \cdot \partial y_x$;

2) $\partial(\mathrm{Cos}\, y)_{(x)} = -\mathrm{Sin}\, y \cdot \partial y_x$;

3) $\partial(\mathrm{tg}\, y)_{(x)} = \mathrm{Sec}^2 y \cdot \partial y_x$;

4) $\partial(\mathrm{Cotg}\, y)_{(x)} = -\mathrm{Cosec}^2 y \cdot \partial y_x$;

5) $\partial(\mathrm{Sec}\, y)_{(x)} = \mathrm{tg}\, y \cdot \mathrm{Sec}\, y \cdot \partial y_x$;

6) $\partial(\mathrm{Cosec}\, y)_{(x)} = -\mathrm{Cotg}\, y\, \mathrm{Cosec}\, y \cdot \partial y_x$ . .

Denkt man sich nun aus der Gleichung $y = \mathrm{Sin}\, z$, worinnen z eine explicite, also y eine implicite Function von x bezeichnet, den Werth von z entwickelt, also durch y ausgedrückt, und bezeichnet das Resultat durch Arc Sin y (gelesen: der Kreisbogen für den Halbmesser 1, dessen Sinus gleich y ist) so folgt aus 1.

$$\partial y_x = \mathrm{Cos}\, z \cdot \partial z_x \text{ also}$$

$$\partial z_x = \frac{\partial y_x}{\mathrm{Cos}\, z} \text{ oder, weil } \mathrm{Cos}\, z = \sqrt{1-y^2} \text{ ist,}$$

7) $\partial(\mathrm{Arc\,Sin}\, y)_{(x)} = \dfrac{\partial y_x}{\sqrt{1-y^2}}$; und eben so erhält man:

8) $\partial(\mathrm{Arc\,Cos}\, y)_{(x)} = -\dfrac{\partial y_x}{\sqrt{1-y^2}}$;

9) $\partial(\mathrm{Arc\,tg}\, y)_{(x)} = \dfrac{\partial y_x}{1+y^2}$;

10) $\partial(\mathrm{Arc\,Cotg}\, y)_{(x)} = -\dfrac{\partial y_x}{1+y^2}$;

11) $\partial(\mathrm{Arc\,Sec}\, y)_{(x)} = \dfrac{\partial y_x}{y\sqrt{y^2-1}}$;

12) $\partial(\mathrm{Arc\,Cosec}\, y)_{(x)} = -\dfrac{\partial y_x}{y\sqrt{y^2-1}}$.

§. 13.

Weil p = 1 ist, so folgt auch noch aus §. 11.

1) $\operatorname{Sin} x = x - \frac{x^3}{(3)} + \frac{x^5}{(5)} - \frac{x^7}{(7)} + \ldots.$

und hiervon beiderseits die Ableitung nach x genommen,

2) $\operatorname{Cos} x = 1 - \frac{x^2}{(2)} + \frac{x^4}{(4)} - \frac{x^6}{(6)} + \ldots.$

Setzt man ferner in §. 12, 9. x für y, so folgt

$\partial(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x)_x = \frac{1}{1+x^2}$ und hieraus

$\partial^2(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x)_x = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$;

$\partial^3(\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x)_x = -2 \cdot \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^3}$; u. s. w.

also nach §. 7.

3) $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots.$

und auf demselben Wege lassen sich noch mehre Vergleichungen bilden.

Die Formel 3. dient zu einer leichten Berechnung des Zahlenwerthes von π. Es ist nämlich

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta},$$

also wenn $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$ und $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ gewählt wird, $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$; daher

$$\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \ldots. \text{ und}$$

$$\beta = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \ldots. \text{ folglich}$$

$\alpha + \beta$ oder $\frac{\pi}{4}$ = der Summe beider Reihen.

Beispiele.

1) $\partial\left[\text{Arc tg}\,\frac{x\sqrt{3}}{2+x}\right]_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{1+x+x^2}$;

2) $\partial\left[\text{Arc tg}\,\frac{1+x}{1-x}\sqrt{3}\right]_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{1+x+x^2}$;

3) $\partial\left[\text{Arc tg}\,\frac{4+3x}{2-5x}\sqrt{3}\right]_x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{1+x+x^2}$;

4) $\left[\partial^2[\text{tg}\,2x]_x\right]_{\frac{\pi}{8}} = 16$;

5) $\left[\partial^2[x-\text{Sin}^2x]_x\right]_{\frac{\pi}{2}} = 2$;

6) $\left[\partial^2[3\,\text{Sin}^2x-2\,\text{Cos}^3x]_x\right]_0 = 12$;

7) $\left[\partial[x+\text{Arc tg}\,2x]_x\right]_0 = 3$.

§. 14.

Ableitungen von Exponential- und logarithmischen Functionen.

Bezeichnet e die Zahl 2,7182818.... und logn oder auch blos ln die Logarithmen, deren Basis e ist, (sie werden die natürlichen Logarithmen genannt), so ist

$$\partial(a^x)_x = \ln a\cdot a^x \text{ und}$$

$$\partial(\overset{a}{\log}\,x) = \frac{1}{\ln a\cdot x}\,.$$

Wird a^x durch z ausgedrückt, und a constant gedacht, so folgt

$$z_{x+k}-z_x = dz = \partial z_x\cdot k + \partial^2 z_x\cdot\frac{k^2}{(2)} + \ldots = a^{x+k}-a^x$$

$$\text{oder } \partial z_x\cdot k + \partial^2 z_x\cdot\frac{k^2}{(2)} + \ldots = (a^k-1)\cdot a^x$$

also, wenn p den Werth bezeichnet, welchen der von x unabhängige Ausdruck $\frac{a^k - 1}{k}$ für k = 0 annimmt,

$$\partial z_x = \partial (a^x)_x = p \cdot a^x; \text{ also}$$

$$\partial^2 z_x = p^2 \cdot a^x; \ \partial^3 z_x = p^3 \cdot a^x \text{ u. s. w.;}$$

folglich nach §. 7.

$$a^x = 1 + px + \frac{(px)^2}{(2)} + \frac{(px)^3}{(3)} + \ldots.$$

Weil nun p von x ganz unabhängig ist, so ist es gleichgültig, welcher Werth von x zur Bestimmung von p benutzt wird; am schnellsten führt der $\frac{1}{p}$ zum Ziele, denn für diesen Werth von x geht letztere Gleichung in

$$a^{\frac{1}{p}} = 1 + 1 + \frac{1}{(2)} + \frac{1}{(3)} + \frac{1}{(4)} + \ldots. = 2{,}71828 \ldots. = e$$

über und man hat daher

$$a = e^p; \text{ folglich } p = \frac{\log a}{\log e} = \ln a; \text{ also}$$

$$\partial (a^x)_x = \ln a \cdot a^x; \text{ und hieraus dann auch nach}$$

§. 10, 1.

$$\partial x_z = \frac{1}{\partial z_x} \text{ oder}$$

$$\partial (\overset{a}{\log} z)_z = \frac{1}{\ln a \cdot z}.$$

§. 15.

Bezeichnet y irgend eine Function von x, so hat man nun nach §. 10. 2. folgende Formeln:

1) $\partial (a^y)_{(x)} = \ln a \ a^y \cdot \partial y_x$

2) $\partial \left[\overset{a}{\log} y\right]_{(x)} = \frac{1}{\ln a \cdot y} \cdot \partial y_x$ und aus ihnen auch

3) $\partial(e^y)_{(x)} = e^y \cdot \partial y_x$

4) $\partial[\ln y]_{(x)} = \frac{\partial y_x}{y}$, so wie auch für $y = x$;

5) $\partial(e^x)_x = e^x$ und

6) $\partial(\ln x)_x = \frac{1}{x}$.

Die Reihe für a^x geht, weil $p = \ln a$ gefunden ist, über in

7) $a^x = 1 + \frac{x \ln a}{1} + \frac{[x \ln a]^2}{(2)} + \frac{[x \ln a]^3}{(3)} + \ldots.$

woraus auch noch

8) $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(2)} + \frac{x^3}{(2)} + \ldots.$ folgt.

Bezeichnen endlich y und z Functionen von x und wird $y^z = w$ gesetzt, so folgt $\ln w = z \ln y$, also auch $\partial(\ln w)_x = z\,\partial(\ln y)_x + \ln y \cdot \partial z_x$, oder

$\frac{\partial w_x}{w} = z \cdot \frac{\partial y_x}{y} + \ln y \cdot \partial z_x$ und hieraus

9) $\partial(y^z)_x = y^z\left[\frac{z}{y}\partial y_x + \ln y \cdot \partial z_x\right]$ so wie, wenn $y = z = x$ ist,

10) $\partial(x^x)_x = x^x[1 + \ln x]$.

Beispiele.

1) $\partial\left[\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})_x\right] = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

2) $\left[\partial\left[\ln(1 + x + \sqrt{2x + x^2})\right]_x\right]_{\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$;

3) $\partial\left[\ln\sqrt{\frac{1 + \operatorname{Sin} x}{1 - \operatorname{Sin} x}}\right]_x = \operatorname{Sec} x$;

4) $\partial\left[\ln\frac{a^3 - x^3}{(a - x)^3} - 2\sqrt{3}\operatorname{Arc\,tg}\frac{a + 2x}{a\sqrt{3}}\right]_x = \frac{6ax}{a^3 - x^3}$;

5) $\partial\left[(2+x^2)^{3+x}\right]_x = [6x + 2x^2 + (2+x^2)\ln(2+x^2)]\,[2+x^2]^{2+x}$.

§. 16.

Reihen zu Berechnung der Logarithmen.

Aus $\ln(1+x) =$ folgt

$$\partial y_x = \frac{1}{1+x};\ \partial^2 y_x = -\frac{1}{(1+x)^2};\ \partial y_x = \frac{2}{(1+x)^3};\ \text{u. s. w.}$$

also nach §. 7.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}\ \text{u. s. w.}$$

und hieraus, x negativ genommen

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5}\ \text{u. s. w.}$$

also durch Subtraction

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\cdot\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right].$$

Wird nun $\frac{1+x}{1-x}$ durch z ausgedrückt, so folgt

$$1)\ \ln z = 2\cdot\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\cdot\left[\frac{z-1}{z+1}\right]^3 + \left[\frac{z-1}{z+1}\right]^5 \ldots\right]$$

und hieraus, wenn $\frac{y+1}{y}$ für z gesetzt wird,

$$2)\ \ln(y+1) = \ln y + 2\left[\frac{1}{2y+1} + \frac{1}{3(2y+1)^3} + \frac{1}{5(2y+1)^5} + \ldots\right]$$

und wenn $\frac{y^2}{y^2-1}$ für z geschrieben wird

$$3)\ \ln(y+1) = 2\ln y - \ln(y-1) - 2\left[\frac{1}{2y^2-1} + \frac{1}{3(2y^2-1)^3} + \ldots\right]$$

Sind hiernach die natürlichen Logarithmen berechnet, so ist dann für jede Basis a

$$4)\ \overset{a}{\log} z = \frac{1}{\ln a}\cdot\ln z\ ;$$ z. B. für die Briggischen, weil $\ln 10 = 2{,}302585\ \ldots$ aus obigen Formeln hervorgeht,

5) $\log. \text{brig.}\, z = 0{,}434295 \cdot \ln z$ und umgekehrt

6) $\ln z = 2{,}302585 \cdot \log. \text{brig.}\, z$.

Die Formel 3. geht, wenn die natürlichen Logarithmen schon bis 1000 berechnet sind und nur eine Genauigkeit von sechs Decimalstellen verlangt wird, in die endliche

$$\ln(y+1) = 2\ln y - \ln(y-1) - \frac{2}{2y^2-1}$$

über, wo für das letzte Glied auch blos $\frac{1}{y^2}$ gesetzt werden kann.

§. 17.

Vergleichung trigonometrischer Functionen mit Potenzen und Logarithmen.

Wird $\sqrt{-1}$ durch i ausgedrückt und in die Reihe §. 15. 8. einmal $+i\cdot x$, dann auch $-ix$ für x gesetzt, so entsteht

$$e^{xi} = 1 - \frac{x^2}{(2)} + \frac{x^4}{(4)} - + \ldots + i\left[x - \frac{x^3}{(3)} + \frac{x^5}{(5)} \ldots\right]$$

und

$$e^{-xi} = 1 - \frac{x^2}{(2)} + \frac{x^4}{(4)} - + \ldots - i\left[x - \frac{x^3}{(3)} + \frac{x^5}{(5)} \ldots\right]$$

und hieraus, wenn die Werthe aus §. 13. 1, 2. substituirt werden

1) $e^{xi} = \operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x$;

2) $e^{-xi} = \operatorname{Cos} x - i \operatorname{Sin} x$.

Aus beiden Gleichungen folgt nun sogleich auch

3) $\operatorname{Sin} x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}$;

4) $\operatorname{Cos} x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$;

5) $e^{2xi} = \frac{1 + i \operatorname{tg} x}{1 - i \operatorname{tg} x}$; oder

6) $e^{2xi} = \frac{\operatorname{Cotg} x + i}{\operatorname{Cotg} x - i}$.

Aus 1. folgt ferner

$$xi = \ln [\mathrm{Cos}\, x + i\, \mathrm{Sin}\, x]$$

und hieraus, wenn man einmal Sin x, dann Cos x durch ein Zeichen, etwa durch x selbst, ausdrückt:

7) $$\mathrm{Arc\,Sin}\, x = \frac{1}{i} \ln \left[\sqrt{1 - x^2} + ix\right]$$

$$= -\frac{1}{i} \ln \left[\sqrt{1 - x^2} - ix\right];$$

8) $$\mathrm{Arc\,Cos}\, x = \frac{1}{i} \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1}\right]$$

$$= -\frac{1}{i} \ln \left[x - \sqrt{x^2 - 1}\right].$$

Eben so entsteht

9) $$\mathrm{Arc\,tg}\, x = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + ix}{1 - ix}$$

$$= \frac{1}{2i} \ln \frac{i - x}{i + x};$$

10) $$\mathrm{Arc\,Cotg}\, x = \frac{1}{2i} \ln \frac{x + i}{x - i}$$

$$= \frac{1}{2i} \ln \frac{-1 + ix}{1 + ix};$$

11) $$\mathrm{Arc\,Sec}\, x = \frac{1}{i} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$= -\frac{1}{i} \ln \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x};$$

12) $$\mathrm{Arc\,Cosec}\, x = \frac{1}{i} \ln \frac{\sqrt{x^2 - 1} + i}{x}$$

$$= -\frac{1}{i} \ln \frac{\sqrt{x^2 - 1} - i}{x}.$$

Umgekehrt entstehen aus den letzten sechs Formeln, wenn jedesmal der Logarithmand durch ein Zeichen, etwa durch x selbst, ausgedrückt wird, noch folgende Relationen

$$13)\quad \ln x = i \operatorname{Arc Sin} \frac{x^2 - 1}{2ix} = i \operatorname{Arc Cos} \frac{x^2 + 1}{2x}$$

$$= i \operatorname{Arc tg} \frac{x^2 - 1}{i(x^2 + 1)} = i \operatorname{Arc Cotg} \frac{i(x^2 + 1)}{x^2 - 1}$$

$$= i \operatorname{Arc Sec} \frac{2x}{x^2 + 1} = i \operatorname{Arc Cosec} \frac{2ix}{x^2 - 1} .$$

§. 18.

Aus §. 17. 1. und dem Gesetz $[e^{xi}]^m = e^{mxi}$ folgt ferner

$$1)\quad [\operatorname{Cos} x + i \operatorname{Sin} x]^m = \operatorname{Cos} mx + i \operatorname{Sin} mx$$

oder φ für mx geschrieben,

$$2)\quad \left[\operatorname{Cos} \frac{\varphi}{m} + i \operatorname{Sin} \frac{\varphi}{m}\right]^m = \operatorname{Cos} \varphi + i \operatorname{Sin} \varphi .$$

Da nun, wenn n jede ganze Zahl, auch Null ausdrückt

$$\operatorname{Cos}(2n\pi + \varphi) = \operatorname{Cos} \varphi \quad \text{und}$$
$$\operatorname{Sin}(2n\pi + \varphi) = \operatorname{Sin} \varphi$$

ist, so folgt aus 2, wenn $2n\pi + \varphi$ für φ gesetzt wird

$$3)\quad \sqrt[m]{\operatorname{Cos} \varphi + i \operatorname{Sin} \varphi} = \operatorname{Cos} \frac{2n\pi + \varphi}{m} + i \operatorname{Sin} \frac{2n\pi + \varphi}{m} .$$

Diese Formel liefert, wenn unter m eine absolute ganze Zahl verstanden wird, alle m Werthe des m deutigen Ausdrucks links des Gleichheitszeichens, wenn rechts desselben für n nach der Folge 0, 1, 2, 3, ... bis $m - 1$ gesetzt wird, indem m, $m + 1$ bis .... $m + m - 1$ dann $2m$, $2m + 1$, ... bis $m + 2m - 1$ ...., u. s. w. für n gesetzt, genau wieder immer die m ersten Werthe hervorbringt.

Eben so entstehen aus §. 17. 2, oder auch einfacher aus den drei hier hergeleiteten Formeln, wenn in ihnen der negative Werth von i eingeführt wird,

4) $[\mathrm{Cos}\, x - i\, \mathrm{Sin}\, x]^m = \mathrm{Cos}\, m x - i\, \mathrm{Sin}\, m x$;

5) $\left[\mathrm{Cos}\frac{\varphi}{m} - i\, \mathrm{Sin}\frac{\varphi}{m}\right]^m = \mathrm{Cos}\, \varphi - i\, \mathrm{Sin}\, \varphi$;

6) $\sqrt[m]{\mathrm{Cos}\, \varphi - i\, \mathrm{Sin}\, \varphi} = \mathrm{Cos}\frac{2n\pi + \varphi}{m} - i\, \mathrm{Sin}\frac{2n\pi + \varphi}{m}$;

und dann noch durch Addition von 3 und 6.

7) $\sqrt[m]{\mathrm{Cos}\, \varphi + i\, \mathrm{Sin}\, \varphi} + \sqrt[m]{\mathrm{Cos}\, \varphi - i\, \mathrm{Sin}\, \varphi} = 2 \cdot \mathrm{Cos}\frac{2n\pi + \varphi}{m}$.

§. 19.

Bestimmung der m Werthe von $\sqrt[m]{a + bi}$.

Entnimmt man die Werthe von r und φ aus den beiden Gleichungen $r\, \mathrm{Cos}\, \varphi = a$ und $r\, \mathrm{Sin}\, \varphi = b$, so folgt $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ und unter r den absoluten Werth dieses Ausdrucks verstanden, $\mathrm{Cos}\, \varphi = \frac{a}{r}$, also $\mathrm{Sin}\, \varphi = \frac{b}{r}$. Es entsteht daher

$$\sqrt[m]{a + bi} = \sqrt[m]{r} \cdot \sqrt[m]{\mathrm{Cos}\, \varphi + i\, \mathrm{Sin}\, \varphi};$$

folglich nach §. 18.

1) $\sqrt[m]{a + bi} = \sqrt[m]{r}\left[\mathrm{Cos}\frac{2n\pi + \varphi}{m} + i\, \mathrm{Sin}\frac{2n\pi + \varphi}{m}\right]$;

2) $\sqrt[m]{a - bi} = \sqrt[m]{r} \cdot \left[\mathrm{Cos}\frac{2n\pi + \varphi}{m} - i\, \mathrm{Sin}\frac{2n\pi + \varphi}{m}\right]$;

3) $\sqrt[m]{a + bi} + \sqrt[m]{a - bi} = 2 \cdot \sqrt[m]{r} \cdot \mathrm{Cos}\frac{2n\pi + \varphi}{m}$;

in welchen Formeln für n nach und nach die Werthe 0, 1, 2 .... bis m — 1 zu setzen sind.

Beispiele.

1) $\sqrt[3]{1} = 1\,;\ \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\,;\ \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\,;$

indem in 1. oder 2. 1 für a; 0 für b; 3 für m; also 1 für r und 0 für φ gesetzt wird.

2) Für $\sqrt[5]{1}$ entstehen, wenn die algebraischen Formen für Sin 36°, Cos 36°, Sin 72°, Cos 72° substituirt werden, die fünf Ausdrücke

$$1;\frac{1}{4}[-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}];\frac{1}{4}[-1-\sqrt{5}+\sqrt{-10+2\sqrt{5}}];$$

$$\frac{1}{4}[-1-\sqrt{5}-\sqrt{-10+2\sqrt{5}}];\frac{1}{4}[-1+\sqrt{5}-\sqrt{-10-2\sqrt{5}}].$$

3) Die Werthe von x aus der cubischen Gleichung $x^3 - px + q = 0$ für den Fall zu bestimmen, wenn $\left(\frac{p}{3}\right)^3 > \left(\frac{q}{2}\right)^2$ ist, unter p seinen absoluten Werth verstanden.

Nach der Cardanischen Formel ist,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2-\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

den absoluten Werth von $\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2}$ durch b ausgedrückt,

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+bi}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-bi}\ ;$$

daher nach Formel 3.

$$x = 2\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}\,\mathrm{Cos}\,\frac{2n\pi+\varphi}{3},\ \text{worinnen}$$

$\mathrm{Cos}\,\varphi = -\frac{q}{2}:\left(\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ ist, und alle drei Werthe von x für $n = 0$; $n = 1$ und $n = 2$ sich reell ergeben.

§. 20.

Ermittelung von $\frac{y_x}{z_x}$ für $x = a$, wenn y_a und zugleich auch $z_a = 0$ wird.

Bezeichnet Q_x den Quotienten $\frac{y}{z}$, so ist

$$Q_{x+k} = \frac{y_{x+k}}{z_{x+k}} \text{ oder}$$

$$Q + \partial Q_x \cdot k + \ldots = \frac{y + \partial y_x \cdot k + \partial^2 y_x \cdot \frac{k^2}{2} \ldots}{z + \partial z_x \cdot k + \partial^2 z_x \cdot \frac{k^2}{2} \ldots}$$

folglich, wenn nach der Voraussetzung $y_a = 0$ und $z_a = 0$ ist,

$$(Q_x)_a + (\partial Q_x)_a \cdot k + \ldots = \frac{(\partial y_x)_a + (\partial^2 y_x)_a \cdot \frac{k}{2} + \ldots}{(\partial z_x)_a + (\partial^2 z_x)_a \cdot \frac{k}{2} + \ldots}$$

und hieraus für $k = 0$;

$$1) \quad (Q_x)_a = \frac{(\partial y_x)_a}{(\partial z_x)_a}.$$

Sollte auch noch dieser Quotient unbestimmt hervorgehen, d. h. $(\partial z_x)_a = 0$ und auch $(\partial y_x)_a = 0$ sich ergeben, so hätte man

$$(Q_x)_a + (\partial Q_x)_a \cdot k + \ldots = \frac{(\partial^2 y_x)_a \cdot \frac{1}{2} + (\partial^3 y_x)_a \cdot \frac{k}{(3)} + \ldots}{(\partial^2 z_x)_a \cdot \frac{1}{2} + (\partial^3 z_x)_a \cdot \frac{k}{(3)} + \ldots}$$

und hieraus, für $k = 0$;

$$2) \quad (Q_x)_a = \frac{(\partial^2 y_x)_a}{(\partial^2 z_x)_a}; \text{ u. s. w.}$$

Der erste der Quotienten der Ableitungen des Zählers und Nenners (nicht die Ableitung des Quotienten) welcher für

$a = 0$ nicht die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, giebt also den gesuchten Werth von $(Q_x)_a$ oder $\left(\frac{y_x}{z_x}\right)_a$.

§. 21.

Nimmt y_a die Form $\frac{1}{0}$ und auch z_a diese Form an, so gebe man dem Quotienten $Q = \frac{y}{z}$ zuvor eine Gestalt $\frac{u}{w}$ für welche $u_a = 0$ und auch $w_a = 0$ wird, und wende dann erst das Gesetz §. 20. an. Dasselbe ist erforderlich, wenn der Werth einer Differenz $D = y - z$ für den Werth a der Urvariablen x bestimmt werden soll, für welchen sowohl y_a als auch z_a die Form $\frac{1}{0}$ annimmt.

Beispiele.

1) $\left[\frac{a^m - x^m}{a^n - x^n}\right]_a = \frac{m}{n} a^{m-n}$.

2) Aus $ax^3 + bx + c = 0$ folgt, wenn $y - \frac{b}{3ay}$ für x gesetzt wird,

$$[y^3]^2 + \frac{c}{a} y^3 - \left(\frac{b}{3a}\right)^3 = 0\,;$$

also, z^2 für a geschrieben,

$$y^3 = \frac{-9cz \pm \sqrt{81c^2z^2 + 12b^3}}{18z^3}\,;$$

daher, wenn

$$\frac{1}{18}[-9cz \pm \sqrt{81c^2z^2 + 12b^3}]$$

durch P^3 ausgedrückt wird,

$$y = \frac{P}{z} \text{ und also } x_z = \frac{3P^2 - b}{3Pz}.$$

Es wird der Werth von $(x_z)_0$ oder $(x_a)_0$ gesucht.

Für $[P_z^3]_0$ ergeben sich die drei Werthe

$$\pm\frac{1}{18}\cdot\sqrt{12b^3};\pm\frac{1}{18}\cdot\sqrt{12b^3}.\frac{-1+i\sqrt{3}}{2};\pm\frac{1}{18}\sqrt{12b^3}.\frac{-1-i\sqrt{3}}{2};$$

der erste derselben giebt $(x_z)_0 = \frac{0}{0}$; der zweite und dritte geben jeder $\frac{1}{0}$, existiren also nicht, und das erste unbestimmt erscheinende Resultat geht über in

$$(x_z)_0 = \left[\frac{2P\,\partial P_z}{P + z\,\partial P_z}\right]_0 = 2(\partial P_z)_0\,.$$

Es ist aber

$$3P^2\cdot\partial P_z = \frac{1}{18}\left[-9c \pm \frac{81c^2z}{\sqrt{81c^2z^2+12b^3}}\right];$$

folglich

$$3\sqrt[3]{\frac{12b^3}{18^2}}\cdot(\partial P_z)_0 = -\frac{c}{2},\ \text{woraus}\ (\partial P_z)_0 = -\frac{c}{2b}$$

also $(x_z)_0 = -\frac{c}{b}$ folgt.

3) Es wird, wenn aus der Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

die drei Werthe von x entnommen sind, die Bestimmung der Werthe von $[x_a]_0$ verlangt.

Wird $\frac{3ac-b^2}{3a^2}$ durch p; $\frac{2b^3-9abc+27a^2d}{27a^3}$ durch q und $x+\frac{b}{3a}$ durch z ausgedrückt, so entsteht aus der gegebenen Gleichung die: $z^3+pz+q=0$, und wenn nun $u-\frac{p}{3u}$ für z substituirt wird,

$$u^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3};\ \text{oder}$$

A für $\frac{9}{2}bc$; B für $\frac{27}{2}d$; P für $3b^2\left[bd-\frac{c^2}{4}\right]$;

Q für $3c\left[c^2-\frac{9}{2}bd\right]$ und R für $\left(\frac{9d}{2}\right)^2$ geschrieben,

$$u^3=\frac{-b^3+Aa-Ba^2\pm 3a\sqrt{P+Qa+Ra^2}}{27a^3}$$

woraus, wenn der Zähler $= y^3$ gesetzt wird,

$$u=\frac{y}{3a} \text{ und } x=\frac{y^2-by+b^2-3ac}{3ay} \text{ folgt.}$$

Es folgt aber $[y_a]_0=-b$; $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\cdot b$; $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\cdot b$ und für den ersten Werth wird $(x_a)_0=\frac{1}{0}$, existirt also nicht; für $(y_a)_0=\frac{1\mp i\sqrt{3}}{2}b$ aber wird $(x_a)_0$ unbestimmt, und man erhält

$$(x_a)_0=\left[\frac{\partial[y^2-by+b^2-3ac]_a}{\partial(3ay)_a}\right]_0=\frac{1}{2b}\left[-c\mp\sqrt{c^2-4bd}\right].$$

4) Den Werth von $\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$ für $x=\frac{\pi}{4}$ zu bestimmen.

Es wird Zähler sowohl wie Nenner $=\frac{1}{0}$, daher ist eine zweckmäßige Umformung erforderlich. Wählt man die

$$\frac{\operatorname{Cotg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}{\operatorname{Cotg}2x},$$

so ergiebt sich sogleich das Resultat $\frac{1}{2}$.

5) Den Werth $\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{x-1}$ für $x=1$ zu bestimmen. Hier wird Minuend und Subtrahend $=\frac{1}{0}$; erzeugt man aber die Form $\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}$, so entspringt für $x=1$ nach zweimaliger Anwendung des Gesetzes der verlangte Werth $\frac{1}{2}$.

6) Es wird $\operatorname{Sec} x - \operatorname{tg} x$ für $x = \frac{\pi}{2}$ verlangt. Diese Differenz ergiebt sich $= 0$.

§. 22.

Vom Größten und Kleinsten für eine Urvariable.

Ist y eine Function von x, welche die Eigenschaft hat, daß für einen zu bestimmenden Werth a von x, unter k einen unendlich kleinen Zuwachs zu x = a verstanden, sowohl y_{a+k} als auch y_{a-k} $\begin{Bmatrix} \text{kleiner} \\ \text{größer} \end{Bmatrix}$ als y_a, d. h. sowohl $y_{a+k} - y_a$ als auch $y_{a-k} - y_a = \begin{Bmatrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{Bmatrix}$ wird, so sagt man: der Werth a für x in y gesetzt, macht $[y_x]_a$ zu einem $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$.

Man findet solche Werthe a für x, wenn einer oder mehre existiren, aus der Gleichung $[\partial y_x]_a = 0$, so wie auch in manchen Fällen aus der $[\partial y_x]_a = \frac{1}{0}$. Im ersten Fall liefert jeder der für a gefundenen Werthe ein $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$, wenn $[\partial^2 y_x]_a = \begin{Bmatrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{Bmatrix}$ wird; im letzteren Fall muß aus der speciellen Betrachtung, ob $y_{a \pm k} - y_a = \begin{Bmatrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{Bmatrix}$ wird, beurtheilt werden, was man gefunden hat. Sollte im ersten Fall sich $[\partial^2 y_x]_a = 0$ ergeben, so hängt die Beurtheilung, ob ein Maximum oder Minimum gefunden ist, von der dritten und vierten Ableitung ab; entsteht nämlich für erstere, nachdem a für x gesetzt ist, ein endlicher positiver oder negativer Ausdruck, so findet weder ein Maximum, noch Minimum statt, entsteht aber Null, so hat man ein $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$ gefunden, wenn

$[\partial^4 y_x]_a = \begin{Bmatrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{Bmatrix}$ wird. Entsteht Null für $(\partial^4 y_x)_a$, so entscheidet eben so die fünfte und sechste Ableitung, u. s. w.

Die Begründung erhellet auf folgendem Wege:

Es ist

$$y_{a+k} - y_a = (\partial y_x)_a \cdot k + (\partial^2 y_x)_a \cdot \frac{k^2}{2} + (\partial^3 y_x)_a \cdot \frac{k^3}{(3)} \cdots\cdot$$

und

$$y_{a-k} - y_a = -(\partial y_x)_a \cdot k + (\partial^2 y_x)_a \cdot \frac{k^2}{2} - (\partial^3 y_x)_a \cdot \frac{k^3}{(3)} \cdots\cdot$$

und folglich wird, nach §. 5, die eine der beiden Differenzen positiv, die andere negativ für alle die Werthe von x, für welche ∂y_x = einem endlichen positiven oder negativen Ausdruck wird, und es kann also keiner dieser Werthe von x, der Bedingung des Maximums oder Minimums genügen, so daß nur die Werthe von x als vielleicht genügend übrig bleiben, welche $\partial y_x = 0$ oder $= \frac{1}{0}$ machen. Bezeichnet nun a einen der Werthe von x, welche aus der Gleichung $\partial y_x = 0$ hervorgehen, so wird sowohl die erste als die zweite Differenz $= [\partial^2 y_x]_a \cdot \frac{k^2}{2}$ u. s. w., und da das Zeichen dieses jetzt ersten Gliedes über das Ergebniß der ganzen Reihe dominirt, so liefert, a für x gesetzt, y_a ein $\begin{Bmatrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{Bmatrix}$, wenn $(\partial^2 y_x)_a = \begin{Bmatrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{Bmatrix}$ sich ergiebt, wenn nur keine der folgenden Ableitungen für $x = a$ die Form $\frac{1}{0}$ annimmt; wird $(\partial^2 y_x)_a = 0$, so hängt die Beurtheilung von der dritten und vierten Ableitung für $x = a$ ab, u. s. w.; wird aber $(\partial^2 y_x)_a = \frac{1}{0}$, so muß man, eben so wie für die Werthe von x, die $\partial y_x = \frac{1}{0}$ machen, speciell untersuchen, ob beide Differenzen $y_{a+k} - y_a$

und $y_{a-k} - y_a$ ein $\left\{\begin{matrix}\text{negatives}\\ \text{positives}\end{matrix}\right\}$ Resultat geben, und dann ist im ersten Fall y_a ein Maximum, im zweiten ein Minimum; wenn aber die eine ein positives, die andere ein negatives Resultat giebt, so findet weder ein Maximum noch ein Minimum für diesen Werth a von x statt.

Beispiele.

1. Für welche Werthe von x nimmt $x^3 - 9x^2 + 24x = y$ ausgezeichnete Werthe an?

   Es wird $(y_x)_4$ ein Minimum und $(y_x)_2$ ein Maximum.

2. Zwei gerade Linien AB, BC schneiden sich in B; in der AB sind zwei Punkte A, D durch ihre Entfernungen $AB = a$; $DB = b$ von B gegeben; den Punkt E in BC zu bestimmen, für welchen Winkel AED ein Maximum wird.

   Es ergiebt sich $BE = \sqrt{a \cdot b}$.

3. Den von einer gegebenen Kugel umschlossenen Cylinder zu bestimmen, dessen Begränzungsfläche ein Maximum ist.

   Bezeichnet r den Halbmesser der Kugel und x die Entfernung ihres Mittelpunktes von jeder der beiden Grundebenen des Cylinders, so ergiebt sich

   $$x = r \cdot \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}.$$

   Für $x = r \cdot \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{10}}$ wird die Differenz zwischen dem Mantel des Cylinders und der Summe seiner beiden Grundebenen ein Maximum.

4. Die Abmessungen des Kugelausschnittes von bestimmtem körperlichen Inhalt a^3 zu bestimmen, dessen gesammte Begränzungsfläche F einen ausgezeichneten Werth annimmt.

Bezeichnet x den Halbmesser der zugehörigen Kugel, so wird F ein Maximum für $x = a\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$, d. h. für die Halbkugel, ein Minimum aber für $x = a \cdot \sqrt[3]{\frac{15}{2\pi}}$.

5. Für welche Werthe von x wird $y = b + (ax - x^2)^{\frac{2}{3}}$ ausgezeichnet?

Es wird y ein Maximum für $x = \frac{a}{2}$; ein Minimum sowohl für $x = 0$ als auch für $x = a$.

§. 23.

Vom Größten und Kleinsten für zwei von einander unabhängige Urvariable.

Ist $z = z_{x,y}$ und bezeichnet a einen zu bestimmenden Werth von x, so wie b einen zu bestimmenden Werth von y, der Bedingung gemäß, daß $z_{a,b}$ ausgezeichnet, d. h. ein Maximum oder Minimum werde, so muß im ersten Fall, k und r unendlich klein gedacht, jede der acht Differenzen

$$z_{a+k,\,b} - z_{a,\,b}\,;\quad z_{a,\,b+r} - z_{a,\,b}\,;\quad z_{a-k,\,b} - z_{a,\,b}\,;$$

$$z_{a,\,b-r} - z_{a,\,b}\,;\quad z_{a+k,\,b+r} - z_{a,\,b}\,;\quad z_{a-k,\,b+r} - z_{a,\,b}\,;$$

$$z_{a+k,\,b-r} - z_{a,\,b}\,;\quad z_{a-k,\,b-r} = z_{a,\,b}$$

negativ, im zweiten aber positiv werden. Es sind aber alle diese Differenzen durch $z_{a+k,\,b+r} - z_{a,\,b}$ auszudrücken, je nachdem man k, r bald = Null, bald positiv, bald negativ gewählt betrachtet, und somit erscheint jede derselben =

$$(\partial z_x)_a \cdot k + (\partial z_y)_b \cdot r + (\partial^2 z_x)_a \cdot \frac{k^2}{2} + [\partial^2 z_{x,y}]_{a,b} \cdot kr + (\partial^2 z_y)_b \cdot \frac{r^2}{2} + \ldots$$

oder, das willkührlich zu wählende Verhältniß $\frac{r}{k}$ durch n ausgedrückt, =

$$[[\partial z_x]_a + n \cdot (\partial z_y)_b] \cdot k + [[\partial^2 z_x]_a + 2n[\partial^2 z_{x,y}]_{a,b} + (\partial^2 z_y)_b n^2] \cdot \frac{k^2}{2} \ldots$$

Aus dieser Darstellung erhellet nun, eben so wie in §. 22, daß nur diejenigen Werthe von x und y Genüge leisten können, für welche der Coefficient von $k = 0$ oder $= \frac{1}{0}$ wird, und erstere Bedingung wird nach §. 2. nur erfüllt, wenn

$$(\partial z_x)_a = 0 \text{ und auch } (\partial z_y)_b = 0$$

wird, aus welchen beiden Bedingungsgleichungen die Werthe von a und b zu entwickeln sind. Wird dann für diese Werthe der Coefficient von $\frac{k^2}{2}$ negativ, so wird $z_{a,b}$ ein Maximum, wird er positiv, so giebt $z_{a,b}$ ein Minimum. Für den ersten Fall muß, da k sowohl wie r auch $= 0$ gewählt werden kann, sowohl $[\partial^2 z_x]_a =$ negativ, als auch $[\partial^2 z_y]_b =$ negativ, und zugleich auch, für den Fall, daß $n =$ negativ ist, absolut gedacht $[\partial^2 z_x]_a + [\partial^2 z_y]_b n^2 > 2n \cdot [\partial^2 z_{x,y}]_{a,b}$ werden; für den zweiten aber muß, sowohl $[\partial^2 z_x]_a =$ positiv, als auch $[\partial^2 z_y]_b =$ positiv sich ergeben, und für den Fall, daß n negativ ist, in absoluter Größe $[\partial^2 z_x]_a + [\partial^2 z_y]_b \cdot n^2 > 2n \cdot [\partial^2 z_{x,y}]_{a,b}$ ausfallen.

Diese beiden Fällen gemeinschaftliche Bedingung

$$[\partial^2 z_x]_a + [\partial^2 z_y]_b \cdot n^2 - 2[\partial^2 z_{x,y}]_{a,b} \cdot n = \text{positiv},$$

muß nun auch noch für denjenigen Werth von n in Erfüllung gehen, welcher den absoluten Werth dieses Ausdrucks am kleinsten macht, und da $n = [\partial^2 z_{x,y}]_{a,b} : [\partial^2 z_y]_b$ für diesen Ausdruck ein Minimum, also ein absolut Kleinstes liefert, so geht die gemeinschaftliche Bedingung über in die

$$(\partial^2 z_x)_a \cdot (\partial^2 z_y)_b - \left[[\partial^2 z_{x,y}]_{a,b}\right]^2 = \text{positiv}.$$

Beispiele.

1. Für welche Werthe von x und y wird

$$z = xy + 30y - x^2 - y^2$$

einen ausgezeichneten Werth annehmen?

Aus den Bedingungsgleichungen

∂z_x oder $y - 2x = 0$ und ∂z_y oder $x + 30 - 2y = 0$ folgt $x = 10$; $y = 20$, und da im Allgemeinen, also auch für diese Werthe,

$\partial^2 z_x = -2$; $\partial^2 z_y = -2$; und

$\partial^2 z_x \cdot \partial^2 z_y - [\partial^2 z_{x,y}]^2 = +3$ wird, so ist

$[z_{x,y}]_{10,20} = 300$ ein Maximum und zwar ein absolutes.

2. Der Umfang eines Dreiecks sei $= a$; für welche Werthe der drei Seiten wird der Inhalt desselben ein Maximum?

Jede der drei Seiten muß $= \frac{a}{3}$ genommen werden *).

III.

Integral- oder Zurückleitungs-Rechnung.

§. 24.

Begriffe und Zeichensprache.

Jede Function z_x, deren erste Ableitung nach x eine gegebene Function von x, etwa y_x liefert, heißt ein Integral von y und wird durch $\int y dx$ vorgestellt, in welcher Darstellung der scheinbare Factor dx die Worte — nach x — ausdrückt. Da nun aber, wenn C nach x constant ist, $\partial z_x = \partial[z + C]_x$ ist, so ist, wenn $\int y dx = z$ ist, auch $\int y dx = z + C$ und jede Function hat demnach unendlich viele Integrale, die jedoch nur um Constantes von einander verschieden

*) Ein Mehreres findet man in meinen Uebungsaufgaben zur Lehre vom Größten und Kleinsten (Berlin 1823, bei Reimer), so wie in meinen: 300 Aufgaben zc. Berlin 1842, bei Duncker und Humblot.

sind. Für jeden besondern Werth von C heißt das Integral ein besonderes, außerdem, so lange C noch ganz beliebig, nur x nicht enthaltend, gedacht wird, das allgemeine. In den Anwendungen kommt der Werth des Integrals am häufigsten vor, welcher = 0 wird, für einen gegebenen Werth a von x, d. h. für $C = -(z_x)_a$, und man sagt dann: das Integral fange mit $x = a$ an. Will man dann den Werth dieses Integrals für $x = b$ haben, so sagt man: das Integral solle mit $x = b$ aufhören, oder: das Integral sei zwischen den Grenzen $x = a$ und $x = b$ zu nehmen, nennt dasselbe ein bestimmtes, und zeigt es durch $\int_{b \div a} y\,dx$ an. Ist daher $\int y\,dx = z$, d. h. $\partial z_x = y$ oder auch: $\partial[\int y\,dx]_x = y$, so heißt: $\int y\,dz = z + C$ das allgemeine Integral, und wenn für C ein bestimmter von x unabhängiger Ausdruck A gesetzt wird

$$\int y\,dx = z + A \text{ ein besonderes,}$$

und

$$\int_{b \div a} y\,dx = (z_x)_b - (z_x)_a \text{ ein bestimmtes}$$

oder auch das zwischen den Grenzen a und b genommene Integral, welches nicht mehr Function von x ist.

§. 25.

Einfache Integrale.

Aus den Gesetzen in §. 9, 12. und 15. gehen unmittelbar folgende Integralformeln hervor:

1) $\int 1\,dx = x + C$;
2) $\int a\,dx = a\int 1 \cdot dx = ax + C$;
3) $\int (y_x \pm z_x)\,dx = \int y\,dx \pm \int z\,dx$;
4) $\int (y\partial z_x + z \cdot \partial y_x)\,dx = yz + C$; woraus und aus 3) auch
5) $\int y\partial z_x\,dx = yz - \int z\partial y_x\,dz$ folgt.

Setzt man in 5) u für ∂z_x, so daß also $z = \int u dx$ ist, so geht 5) über in

6) $\int yu dx = y \int u dx - \int \partial y_x [\int u dx] dx$; worinnen $\int u dx$ jedesmal dasselbe besondere Integral vorstellt. Die Anwendung dieser Formel heißt: theilweise integriren.

7) $\int \frac{z \partial y_x - y \partial z_x}{z^2} dx = \frac{y}{z} + C$;

8) $\int y^n \cdot \partial y_x dx = \frac{y^{n+1}}{n+1} + C$;

9) $\int \operatorname{Cos} y \cdot \partial y_x dx = \operatorname{Sin} y + C$;

10) $\int \operatorname{Sin} y \cdot \partial y_x dx = -\operatorname{Cos} y + C$;

11) $\int \operatorname{Sec}^2 y \, \partial y_x dx = \operatorname{tg} y + C$;

12) $\int \operatorname{Cosec}^2 y \, \partial y_x dx = -\operatorname{Cotg} y + C$;

13) $\int \operatorname{tg} y \operatorname{Sec} y \, \partial y_x dx = \operatorname{Sec} y + C$;

14) $\int \operatorname{Cotg} y \operatorname{Cosec} y \, \partial y_x dx = -\operatorname{Cosec} y + C$;

15) $\int \frac{\partial y_x}{\sqrt{1-y^2}} dx = \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} y + C = -\operatorname{Arc} \operatorname{Cos} y + C$;

16) $\int \frac{\partial y_x}{1+y^2} dx = \operatorname{Arc} \operatorname{tg} y + C = -\operatorname{Arc} \operatorname{Cotg} y + C$;

17) $\int \frac{\partial y_x}{y\sqrt{y^2-1}} dx = \operatorname{Arc} \operatorname{Sec} y + C = -\operatorname{Arc} \operatorname{Cosec} y + C$;

18) $\int a^y \partial y_x dx = \frac{a^y}{\ln a} + C$;

19) $\int e^y \partial y_x dx = e^y + C$;

20) $\int \frac{\partial y_x}{y} dx = \ln y + C$.

Beispiele.

1) $\int (ax + bx^2 + c) dx = \frac{1}{2} ax^2 + \frac{1}{3} bx^3 + cx + C$;

2) $\int [ax + bx^2 + c] da = \frac{1}{2} a^2 x + abx^2 + ac + C$;

3) $\int [ax + bx^2 + c]\, db = abx + \frac{1}{2} b^2 x^2 + bc + C$;

4) $\int [ax + bx^2 + c]\, dc = acx + bcx^2 + \frac{1}{2} c^2 + C$;

5) $\int x \operatorname{Cos} x\, dx = x \operatorname{Sin} x + \operatorname{Cos} x + C$;

6) $\int \sqrt[n]{x}\, dx = \frac{n}{n+1} \cdot x^{\frac{n+1}{n}} + C$;

7) $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln \operatorname{Cos} x + C = \ln \operatorname{Sec} x + C$.

§. 26.

Zu den Elementar-Integralformeln des vorigen Paragraphen sind noch folgende drei allgemeine hinzuzufügen.

1) $\int y\, dx = x \cdot (y_x)_0 + \frac{x^2}{2} (\partial y_x)_0 + \frac{x^3}{(3)} (\partial^2 y_x)_0 + \ldots + C$;

2) $\int y dx = \frac{x-a}{1} \cdot (y_x)_a + \frac{(x-a)^2}{2} (\partial y_x)_a + \frac{(x-a)^3}{(3)} (\partial^2 y_x)_a + \ldots + C$;

3) $\int y\, dx = xy - \frac{x^2}{2} \partial y_x + \frac{x^3}{(3)} \partial^2 y_x - \frac{x^4}{(4)} \partial^3 y_x \ldots + C$.

Die ersten beiden ergeben sich unmittelbar aus den Mac-laurinschen Reihen (§. 7.); die dritte, die Bernoullische Reihe entspringt aus §. 25. 6). Es ist nämlich

$$\int y\, dx = y \int 1 \cdot dx - \int \partial y_x (\int 1 \cdot dx)\, dx = xy - \int x\, \partial y_x\, dx;$$

und eben so:

$$\int x\, \partial y_x\, dx = \partial y_x \cdot \int x\, dx - \int \partial^2 y_x (\int x\, dx)\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \partial y_x$$
$$- \frac{1}{2} \int x^2 \cdot \partial^2 y_x \quad \text{u. s. w.}$$

Diese drei Reihen sind in den speciellen Fällen, wo sie schnell convergiren, brauchbar, insbesondere die zweite, in welcher a ganz willkührlich ist, und daher so gewählt werden kann, daß ein rascheres Convergiren erfolgt.

§. 27.

Integrations-Methoden.

Ist $\int y\,dx$ nach keiner der zwanzig Formeln in §. 25. unmittelbar anzugeben, so läßt sich dasselbe nur dann in endlicher Form finden, wenn man durch Umformung die indirekte Operation des Integrirens auf eine oder mehre jener zwanzig Formen zurückführen kann. Die Methoden, um diese Umformung zu bewirken, lassen sich in drei Klassen theilen:

1) Die Methode der unbestimmten Coefficienten,
2) die Reductions-Methode,
3) die Substitutions-Methode.

Die erste Methode besteht darin, daß man, wenn die Form des gesuchten Integrals vermuthet werden kann, eine passend erscheinende mit einer hinreichenden Anzahl constanter Coefficienten wählt, dann beiderseits die erste Ableitung bildet, und hieraus nach §. 2, im Fall die Anzahl der Coefficienten mit der der entstehenden Anzahl Gleichungen übereinstimmt, diese Coefficienten entwickelt.

Es sei z. B. $\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\cdot dx$ zu bestimmen.

Da, wenn $a = 1$; $b = 0$; $c = 1$ ist, das Integral $= \operatorname{Arc tg} x + C$ sein würde [§. 25. 16)], so könnte

$$\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\,dx = A\cdot\operatorname{Arc tg}(B+Dx)+C$$

sein, und dann müßte nach §. 12. 9)

$$\frac{1}{a+bx+cx^2} = A\cdot\frac{D}{1+(B+Dx)^2}$$

werden, welches für

$$A = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\;;\quad B = \frac{b}{\sqrt{4ac-b^2}}\;;\quad D = \frac{2c}{\sqrt{4ac-b^2}}$$

der Fall ist, so daß man also

$$\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{Arctg} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} + C \text{ hat.}$$

Eben so hätte man aber auch, da, wenn $a = 1$; $b = 1$; und $c = 0$ ist, das Integral $= \ln(1+x) + C$ sein würde, die Form $A \ln(B+x) + C$ oder die $A \cdot \ln \frac{B+x}{D+x} + C$ oder eine ähnliche wählen können. Die erste Wahl führt aber nicht zum Ziel, weil mehr Bedingungen entstehen, als unbekannte constante Coefficienten aufgenommen wurden, wohl aber die zweite, welche

$$\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}} + C$$

liefert.

Es geht übrigens letzteres Resultat auch unmittelbar aus dem ersteren nach der Formel §. 17. 9) hervor. Practisch bequemer ist das erstere, wenn $4ac - b^2$ positiv; das letztere, wenn $4ac - b^2$ negativ ist. Ist $4ac - b^2 = 0$, also $c = \frac{b^2}{4a}$, so ist sogleich nach §. 25. 8)

$$\int \frac{1}{a+bx+cx^2}\,dx = -\frac{4a}{b(2a+bx)} + C.$$

Die zweite Methode des Reducirens besteht vorzüglich in der Zerlegung eines Bruches in seine Parzialbrüche und in dem theilweisen Integriren.

So ist z. B., weil $\frac{1}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x}\right)$ ist,

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}\left[\int \frac{1}{a+x}\,dx - \int \frac{-1}{a-x}\,dx\right] = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} + C,$$

und das Beispiel 5) zu §. 25. eine Anwendung des theilweisen Integrirens.

Die dritte Methode des Substituirens besteht in der Anwendung der Formel

$$\int y\,dx = \int y\,\partial x_z\,dz$$

in welcher z zwar eine beliebige, aber wenn die Absicht (die Ermittelung von $\int y\,dx$) erreicht werden soll, zweckmäßig zu wählende Function von x bezeichnet.

Die Begründung dieser Formel ist folgende:

Ist $\int y\,dx = u + C$, also $\partial u_x = y$, so ist, wenn zwischen x und z irgend eine Gleichung gewählt wird,

$$\partial u_{(z)} = \partial u_x \cdot \partial x_z = y \cdot \partial x_z\,,\ \text{folglich}$$

$$u = \int y\,\partial x_z\,dz + C\ \text{und demnach}$$

$$\int y\,dx = \int y\,\partial x_z\,dz + C\,,$$

in welcher Gleichung, links des Gleichheitszeichens, y eine Function von x, rechts aber derselbe Buchstabe dasjenige vorstellt, was aus dieser Function wird, wenn überall wo in ihr x vorkommt, dafür der aus der gewählten Gleichung zwischen x und z entwickelte, durch z ausgedrückte Werth für x substituirt ist. Bei der Wahl der Gleichung zwischen x und z muß es häufig die Absicht sein, irrationale Functionen nach x in rationale nach z umzuformen, wie z. B. $\sqrt{a+bx^2} = x\sqrt{b}+z$ zu setzen, wodurch $\sqrt{a+bx^2}$ die Form $\frac{a+z^2}{2z}$; oder auch $\sqrt{a+bx^2} = \sqrt{a}+z\cdot x$ festzustellen, wodurch $\sqrt{a+bx^2}$ die Form $\sqrt{a}\cdot\frac{b+z^2}{b-z^2}$ annimmt, ferner: wenn b negativ ist, etwa $bx^2 = a\,\mathrm{Sin}^2 z$ zu setzen, wodurch $\sqrt{a-bx^2}$ in $\sqrt{a}\cdot\mathrm{Cos}\,z$ übergeht; oder auch $x = z - \frac{b}{2c}$ zum Grunde zu legen, damit $a+bx+cx^2$ das zweite Glied verliert und die Gestalt $\frac{4ac-b^2}{4c}+cz^2$ erscheint; öfters führt auch die einfache Re-

lation $xz = 1$ zum verlangten Ziele, zuweilen die noch einfachere Substitution $\frac{ax + b - b}{a}$ für x zu schreiben.

Beispiele zur dritten Methode.

1) Wird $a + bx = z$ gesetzt, so folgt:

$$\int \frac{1}{a + bx} dx = \frac{1}{b} \ln (a + bx) + C .$$

2) Wird $\sqrt{a + bx^2} = x\sqrt{b} + z$ gesetzt, so folgt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a + bx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln (x\sqrt{b} + \sqrt{a + bx^2}) + C .$$

3) Wird $bx^2 = a \operatorname{Sin}^2 z$ gesetzt, so folgt:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a - bx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{Arc Sin} \left(x \sqrt{\frac{b}{a}} \right) + C .$$

4) Wird $\frac{2cx + b - b}{2c}$ für x geschrieben, so folgt:

$$\int \frac{x}{a + bx + cx^2} dx = \frac{1}{2c} \int \frac{\partial (a + bx + cx^2)_x}{a + bx + cx^2} dx - \frac{b}{2c} \int \frac{1}{a + bx + cx^2} dx$$

wo das erste Glied $= \frac{1}{2c} \ln (a + bx + cx^2)$, das zweite aber bei der ersten Methode schon bestimmt worden ist.

5) Wird $xz = 1$ gesetzt, so folgt:

$$\int \frac{1}{x(a + bx + cx^2)} dz = - \int \frac{z}{c + bz + az^2} dz ,$$

welches Integral nach 4) bestimmt ist. Durch Zerlegung des Bruches $\frac{1}{x(a + bx + cx^2)}$ in seine Parzialbrüche gelangt man ebenfalls leicht zum Ziel.

6) $$\int \frac{1}{1 - x^3} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctg} \frac{1 + 2x}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln \frac{1 + x + x^2}{(1 - x)^2} + C .$$

§. 28.

Zusammenstellung der nach §. 27. zu findenden nothwendigsten Integralformeln.

1) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \ln [x\sqrt{b} + \sqrt{a+bx^2}] + C;$$

2) $$\int \frac{1}{\sqrt{a-bx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{b}} \operatorname{Arc Sin}\left(x\sqrt{\frac{b}{a}}\right) + C;$$

3) $$\int \sqrt{a+bx^2} \cdot dx = \frac{1}{2} x\sqrt{a+bx^2} + \frac{a}{2}\int \frac{1}{\sqrt{a+bx^2}} dx,$$

durch theilweises Integriren und Substituiren von $a+bx^2-a$ für bx^2.

In den folgenden Formeln bezeichnet y den Ausdruck $a+bx+cx^2$;

4) $$\int \frac{1}{y} dx = \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \cdot \operatorname{Arc tg} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}} + C;$$

5) $$\int \frac{1}{y} dx = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \ln \frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}} + C;$$

6) $$\int \frac{x}{y} dx = \frac{\ln y}{2c} - \frac{b}{2c}\int \frac{1}{y} dx;$$

7) $$\int \frac{1}{xy} dx = \frac{1}{2a} \ln \frac{x^2}{y} - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{y} dx;$$

8) $$\int \frac{1}{\sqrt{y}} dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln [b+2cx+2\sqrt{c}\cdot\sqrt{a+bx+cx^2}] + C;$$

9) $$\int \frac{1}{\sqrt{a+bx-cx^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{c}} \operatorname{Arc Sin} \frac{2cx-b}{\sqrt{4ac+b^2}} + C;$$

10) $$\int \sqrt{y}\, dx = \frac{(b+2cx)\sqrt{y}}{4c} + \frac{4ac-b^2}{8c}\int \frac{1}{\sqrt{y}} dx;$$

$$11)\ \int\frac{x}{\sqrt{y}}dx = \frac{\sqrt{y}}{c} - \frac{b}{2c}\int\frac{1}{\sqrt{y}}dx\ ;$$

$$12)\ \int x\sqrt{y}\,dx = \frac{y\sqrt{y}}{3c} - \frac{b}{2c}\int\sqrt{y}\,dx\ ;$$

$$13)\ \int\frac{1}{x\sqrt{y}}dx = -\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{2a+bx+2\sqrt{ay}}{x} + C\ ;$$

$$14)\ \int\frac{1}{x\sqrt{-a+bx+cx^2}}dx = -\frac{1}{\sqrt{a}}\mathrm{ArcSin}\frac{2a-bx}{x\sqrt{4ac+b^2}} + C;$$

$$15)\ \int\frac{\sqrt{y}}{x}dx = \sqrt{y} + a\int\frac{1}{x\sqrt{y}}dx + \frac{b}{2}\int\frac{1}{\sqrt{y}}dx\ .$$

Diese Formeln zu Bestimmung der am häufigsten vorkommenden Integrale algebraischer Functionen geben, wenn einer oder der andere der Coefficienten a, b, c = 0 ist, nicht immer zur Berechnung geeignete Formen. Die Resultate ergeben sich aber dann, wenn sie nicht schon in den vorhergehenden Formeln enthalten sind, am leichtesten unmittelbar.

Ist z. B. $p = \int\frac{1}{x\sqrt{bx+cx^2}}dx$ zu bestimmen, so führt weder 13) noch 14) dadurch zum Ziel, daß man 0 für a einführt; setzt man aber $xz = 1$, so wird $p = -\int\frac{1}{\sqrt{c+bz}}dz$ und wenn nun $\sqrt{c+bz}$ durch u ausgedrückt wird, so folgt:

$$p = -\frac{2}{b}\int 1\cdot du = -\frac{2}{b}\cdot u + C = -\frac{2}{b}\cdot\sqrt{\frac{b+cx}{x}} + C\ .$$

§. 29.

Reductions-Formeln.

Die Methode der unbestimmten Coefficienten, wobei zuweilen auch unbestimmte Exponenten mit aufzunehmen sind, führt in den Fällen wo Integrale von den Formen in §. 28,

aber mit höheren Exponenten vorkommen, auf Formeln, welche die Arbeit auf Ausdrücke derselben Art, aber mit kleineren Exponenten reduciren, und solche Formeln nennt man Reductions-Formeln. Soll z. B., wenn y den Ausdruck $a + bx + cx^2$ bezeichnet und n eine positive ganze Zahl vorstellt, $\int \frac{1}{y^n} dx$ auf die Bestimmung von $\int \frac{1}{y} dx$ und, wenn unter n ein positiver Bruch mit dem Nenner 2 verstanden wird, $\int \frac{1}{y^n} dx$ auf die von $\int \frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} dx$ zurückgeführt werden, so setze man

$$\int \frac{1}{y^n} dx = \frac{A + Bx}{y^r} + D\int \frac{1}{y^{n-1}} dx$$

und untersuche, ob für A, B, r und D sich dieser Bedingung entsprechende constante Werthe ergeben. Es müßte, wenn man beiderseits die erste Ableitung nach x bildet, und dann mit y^n multiplicirt

$$1 = y^{n-r-1} \cdot [B(a + bx + cx^2) - r(A + Bx)(b + 2cx)] + D(a + bx + cx^2)$$

werden, und es fällt in die Augen, daß $r = n - 1$ gewählt, drei Gleichungen zur Bestimmung von A, B, D, nach §. 2, entspringen. Entwickelt man diese Werthe, so folgt:

$$1) \int \frac{1}{y^n} dx = \frac{1}{(n-1)(4ac-b^2)} \left[\frac{b+2cx}{y^{n-1}} + 2(2n-3)c \int \frac{1}{y^{n-1}} dx \right];$$

welche Formel durch wiederholte Anwendung zum Ziel führt.

Entwickelt man $\int \frac{1}{y^{n-1}} dx$ aus 1) und schreibt dann $1 - n$ für n, so entsteht:

$$2) \int y^n dx = \frac{1}{2(2n+1)c} \left[(b+2cx)y^n + n(4ac-b^2) \int y^{n-1} \cdot dx \right];$$

und auf die eine oder andere Weise ergeben sich noch fol-

gende Reductions-Formeln für die gewöhnlichsten Fälle der Anwendung.

$$3)\ \int\frac{x^m}{y^n}dx = -\frac{x^{m-1}}{2c(n-1)y^{n-1}} + \frac{m-1}{2c(n-1)}\cdot\int\frac{x^{m-2}}{y^{n-1}}dx - \frac{b}{2c}\cdot\int\frac{x^{m-1}}{y^n}dx,$$ so wie auch:

$$4)\ \int\frac{x^m}{y^n}dx = \frac{1}{(2n-m-1)c}\cdot\left[-\frac{x^{m-1}}{y^{n-1}} + (m-1)a\int\frac{x^{m-2}}{y^n}dx + b(m-n)\int\frac{x^{m-1}}{y^n}dx\right];$$

$$5)\ \int\frac{1}{xy^n}dx = \frac{1}{2(n-1)ay^{n-1}} - \frac{b}{2a}\int\frac{1}{y^n}dx + \frac{1}{a}\int\frac{1}{xy^{n-1}}dx;$$

$$6)\ \int\frac{1}{x^m y^n}dx = \frac{1}{(m-1)a}\left[\frac{-1}{x^{m-1}\cdot y^{n-1}} - b(m+n-2)\int\frac{1}{x^{m-1}y^n}dx - (m+2n-3)c\int\frac{1}{x^{m-2}y^n}dx\right];$$

$$7)\ \int x^m y^n dx = \frac{1}{(2n+m+1)c}\cdot\left[x^{m-1}y^{n+1} - (m-1)a\int x^{m-2}y^n dx - (m+n)b\int x^{m-1}y^n dx\right];$$

$$8)\ \int\frac{y^n}{x}dx = \frac{y^n}{2n} + \frac{b}{2}\int y^{n-1}dx + a\int\frac{y^{n-1}}{x}dx;$$

$$9)\ \int\frac{y^n}{x^m}dx = \frac{1}{(m-1)a}\left[-\frac{y^{n+1}}{x^{m-1}} + (n+2-m)b\int\frac{y^n}{x^{m-1}}dx + (2n+3-m)c\int\frac{y^n}{x^{m-2}}dx\right].$$

Folgende zwei aus 4) und 7) entspringende Formeln kommen besonders öfters in Anwendung:

10) $$\int \frac{x^2}{\sqrt{a+cx^2}} dx = \frac{x}{2c}\sqrt{a+cx^2} - \frac{a}{2c}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{a+cx^2}} dx\ ;$$

11) $$\int x^2\sqrt{a+cx^2}\, dx = \frac{x}{4c}(a+cx^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a}{4c}\int \sqrt{a+cx^2}\, dx\ .$$

§. 30.

Fortsetzung.

Die Formeln im vorigen Paragraphen geben, wenn einer oder der andere der Coefficienten a, b, c = 0 ist, zuweilen Formen, die nicht zur Berechnung geeignet sind, z. B. 2, wenn $c = 0$ ist. Multiplicirt man aber 2 mit $2(2n+1)\cdot c$, setzt dann erst 0 für c, entwickelt $\int y^{n-1} dx$ und schreibt zuletzt n für $n-1$, so folgt

1) $$\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{(n+1)b} + C\ .$$

Auf demselben Wege erhält man für $c = 0$; aus 3)

2) $$\int \frac{x^m}{(a+bx)^n} dx = \frac{1}{(n-1)b}\left[\frac{-x^m}{(a+bx)^{n-1}} + m\int \frac{x^{m-1}}{(a+bx)^{n-1}} dx\right];$$

ferner aus 4)

3) $$\int \frac{x^m}{(a+bx)^n} dx = \frac{1}{(m+1-n)b}\left[\frac{x^m}{(a+bx)^{n-1}} - ma\int \frac{x^{m-1}}{(a+bx)^n} dx\right];$$

und aus 7)

4) $$\int x^m (a+bx)^n dx = \frac{1}{(m+n+1)b}\Big[x^m (a+bx)^{n+1} - ma\int x^{m-1}(a+bx)^n dx\Big].$$

Für $a = 0$ folgt aus 5)

5) $$\int \frac{1}{x(bx+cx^2)^n} dx = -\frac{1}{2n(bx+cx^2)^n} + \frac{b}{2}\int \frac{1}{(bx+cx^2)^{n+1}} dx;$$

dann aus 6)

$$6)\quad \frac{1}{x^m(bx+cx^2)^n}dx = \frac{-1}{(m+n-1)b}\cdot\Bigg[\frac{1}{x^m(bx+cx^2)^{n-1}}$$

$$+[m+2n-2]c\int\frac{1}{x^{m-1}(bx+cx^2)^n}dx\Bigg];$$

und aus 9)

$$7)\int\frac{(bx+cx^2)^n}{x^m}dx = \frac{1}{(n+1-m)b}\cdot\Bigg[\frac{(bx+cx^2)^{n+1}}{x^m}$$

$$-[2n+2-m]c\int\frac{(bx+cx^2)^n}{x^{m-1}}dx\Bigg].$$

Endlich ergiebt sich noch, wenn $4ac = b^2$ ist, aus 1)

$$8)\int\frac{1}{y^n}dx = -\frac{b+2cx}{2(2n-1)cy^n}+C;$$

worin $y = \frac{[b+2cx]^2}{4c} = \frac{[2a+bx]^2}{4a} = [\sqrt{a}+x\sqrt{c}]^2$ ist.

§. 31.

Integrale transcendenter Functionen.

Die Grundformeln für Integrale transcendenter Functionen sind:

1) $\int \operatorname{Sin} x\, dx = \operatorname{Cos} x + C$; [§. 25. 10)].

2) $\int \operatorname{Cos} x\, dx = -\operatorname{Sin} x + C$; [§. 25. 9)].

3) $\int \operatorname{tg} x\, dx = \ln \operatorname{Sec} x + C$;

$$\left(\frac{\operatorname{Sin} x}{\operatorname{Cos} x} \text{ oder } -\frac{\partial(\operatorname{Cos} x)_x}{\operatorname{Cos} x} \text{ für } \operatorname{tg} x \text{ gesetzt}\right).$$

4) $\int \operatorname{Cotg} x\, dx = \ln \operatorname{Sin} x + C$;

$$\left(\text{aus 3) } x+z = \frac{\pi}{2} \text{ gesetzt}\right).$$

5) $\int \mathrm{Sec}\,x\,dx = \ln[\mathrm{tg}\,x + \mathrm{Sec}\,x] + C$;

oder $= \ln \mathrm{tg}\,\frac{\pi + 2x}{4} + C$;

$\left(\frac{1}{\mathrm{Cos}\,x} = \frac{\mathrm{Cos}\,x}{1 - \mathrm{Sin}^2 x}\right.$ für $\mathrm{Sec}\,x$ gesetzt, durch Parzial-Brüche$\left.\right)$.

6) $\int \mathrm{Cosec}\,x\,dx = \ln(\mathrm{Cosec}\,x - \mathrm{Cotg}\,x) + C$;

oder $= \ln \mathrm{tg}\frac{x}{2} + C$;

(aus 5) $x + z = \frac{\pi}{2}$ gesetzt).

7) $\int a^y \cdot \partial y_x\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^y + C$; [§. 25. 18)],

und hieraus, für $a = e$ [§. 14.]

8) $\int e^y \partial y_x\,dx = e^y + C$; [§. 25. 19)],

und dann noch folgende durch die Methode der unbestimmten Coefficienten, so wie durch theilweises Integriren leicht zu begründende Reductions-Formeln.

9) $\int \mathrm{Sin}^n x\,dx = -\frac{\mathrm{Sin}^{n-1} x\,\mathrm{Cos}\,x}{2} + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{Sin}^{n-2} x\,dx$;

10) $\int \mathrm{Cos}^n x\,dx = \frac{\mathrm{Sin}\,x\,\mathrm{Cos}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \mathrm{Cos}^{n-2} x\,dx$;

11) $\int \mathrm{tg}^n x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{tg}^{n-2} x\,dx$;

12) $\int \mathrm{Cotg}^n x\,dx = -\frac{\mathrm{Cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \mathrm{Cotg}^{n-2} x\,dx$;

13) $\int \mathrm{Sec}^n x\,dx = \frac{\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{Sec}^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \mathrm{Sec}^{n-2} x\,dx$;

14) $\int \mathrm{Cosec}^n x\,dx = -\frac{\mathrm{Cotg}\,x\,\mathrm{Cosec}^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1}\int \mathrm{Cosec}^{n-2} x\,dx$;

15) $\int \mathrm{Sin}^n x\,\mathrm{Cos}^m x\,dx = \frac{\mathrm{Cos}^{m-1} x\,\mathrm{Sin}^{n+1} x}{n+m} + \frac{m-1}{n+m}\int \mathrm{Sin}^n x\,\mathrm{Cos}^{m-2} x\,dx$;

$$16)\ \int \mathrm{Sin}^n x\ \mathrm{Cos}^m x\, dx = -\frac{\mathrm{Sin}^{n-1} x \cdot \mathrm{Cos}^{m+1} x}{n+m}$$
$$+\frac{n-1}{n+m}\int \mathrm{Sin}^{n-2} x\ \mathrm{Cos}^m x\, dx\ ;$$

$$17)\ \int \frac{\mathrm{Sin}^n x}{\mathrm{Cos}^m x} dx = \frac{\mathrm{Sin}^{n+1} x}{(m-1)\,\mathrm{Cos}^{m-1} x} - \frac{n+2-m}{n-1}\int \frac{\mathrm{Sin}^n x}{\mathrm{Cos}^{m-2} x} dx;$$

$$18)\ \int \frac{\mathrm{Sin}^n x}{\mathrm{Cos}^m x} dx = -\frac{\mathrm{Sin}^{n-1} x}{(n-m)\,\mathrm{Cos}^{m-1} x} + \frac{n-1}{n-m}\int \frac{\mathrm{Sin}^{n-2} x}{\mathrm{Cos}\ x} dx;$$

$$19)\ \int \frac{\mathrm{Cos}^m x}{\mathrm{Sin}^n x} dx = -\frac{\mathrm{Cos}^{m+1} x}{(n-1)\,\mathrm{Sin}^{n-1} x} - \frac{m+2-n}{n-1}\int \frac{\mathrm{Cos}^m x}{\mathrm{Sin}^{n-2} x} dx;$$

$$20)\ \int \frac{\mathrm{Cos}^m x}{\mathrm{Sin}^n x} dx = \frac{\mathrm{Cos}^{m-1} x}{(m-n)\,\mathrm{Sin}^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\mathrm{Cos}^{m-2} x}{\mathrm{Sin}^n x} dx;$$

$$21)\ \int \frac{1}{\mathrm{Sin}^n x\ \mathrm{Cos}^m x} dx = \frac{1}{(m-1)\ \mathrm{Sin}^{n-1} x\ \mathrm{Cos}^{m-1} x}$$
$$+\frac{n+m-2}{m-1}\int \frac{1}{\mathrm{Sin}^n x\ \mathrm{Cos}^{m-2} x} dx\ ;$$

$$22)\ \int \frac{1}{\mathrm{Sin}^n x\ \mathrm{Cos}^m x} dx = \frac{-1}{(n-1)\ \mathrm{Sin}^{n-1} x\ \mathrm{Cos}^{m-1} x}$$
$$+\frac{n+m-2}{n-1}\int \frac{1}{\mathrm{Sin}^{n-2} x \cdot \mathrm{Cos}^m x} dx\ ;$$

$$23)\ \int x^n \mathrm{Sin}\, x\, dx = -x^n \mathrm{Cos}\, x + n x^{n-1} \mathrm{Sin}\, x - n(n-1)\int x^{n-2} \mathrm{Sin}\, x\, dx;$$

$$24)\ \int x^n \mathrm{Cos}\, x\, dx = x^n \mathrm{Sin}\, x + n x^{n-1} \mathrm{Cos}\, x - n(n-1)\int x^{n-2} \mathrm{Cos}\, x\, dx;$$

$$25)\ \int x\, \mathrm{Sin}^n x\, dx = \frac{\mathrm{Sin}^n x}{n^2} - \frac{x\, \mathrm{Sin}^{n-1} x\, \mathrm{Cos}\, x}{n} + \frac{n-1}{n}\int x\, \mathrm{Sin}^{n-2} x\, dx;$$

$$26)\ \int x\, \mathrm{Cos}^n x\, dx = \frac{\mathrm{Cos}^n x}{n^2} + \frac{x\, \mathrm{Sin}\, x\, \mathrm{Cos}^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int x\, \mathrm{Cos}^{n-2} x\, dx;$$

$$27)\ \int x^n \mathrm{Sin}^m x\, dx = -\frac{x^n \mathrm{Sin}^{m-1} x\ \mathrm{Cos}\, x}{m} + \frac{n x^{n-1} \mathrm{Sin}^m x}{m^2}$$
$$+\frac{m-1}{m}\int x^n \mathrm{Sin}^{m-2} x\, dx - \frac{n(n-1)}{m^2}\int x^{n-2} \mathrm{Sin}^m x\, dx\ ;$$

28) $\int x^n \operatorname{Cos}^m x\, dx = \frac{x^n \operatorname{Sin} x \operatorname{Cos}^{m-1} x}{m} + \frac{n x^{n-1} \operatorname{Cos}^m x}{m^2}$
$+ \frac{m-1}{m}\int x^n \operatorname{Cos}^{m-2} x\, dx - \frac{n(n-1)}{m^2}\int x^{n-2} \operatorname{Cos}^m x \cdot dx$;

29) $\int a^x \cdot x^n dx = \frac{x^n a^x}{\ln a} - \frac{n}{\ln a}\int a^x \cdot x^{n-1} dx$;

30) $\int x^n (\ln x)^m dx = \frac{x^{n+1}(\ln x)^m}{n+1} - \frac{m}{n+1}\int x^n \cdot (\ln x)^{m-1} dx$.

Beispiele.

1) $\int_{\frac{\pi}{4} \div 0} \operatorname{tg}^3 x \operatorname{Sec}^2 x\, dx = \frac{1}{4}$;

2) $\int_{\frac{\pi}{4} \div \frac{\pi}{6}} x \operatorname{Sin}^3 x\, dx = \frac{26\sqrt{2} - 25}{72} - \frac{5\sqrt{2} - 3\sqrt{3}}{48}\pi$;

3) $\int_{\frac{\pi}{2} \div 0} x^3 \operatorname{Cos}^2 x\, dx = \frac{\pi^4 - 12\pi^2 + 48}{128}$;

4) $\int_{2 \div 0} e^x \cdot x^3 dx = 6 + 2e^2$;

5) $\int_{e \div \frac{1}{e}} x^2 (\ln x)^3 dx = \frac{2}{27}[2e^3 + 13 \cdot e^{-3}]$.

§. 32.

Integration von Differenzial-Gleichungen.

Enthält eine Differenzial-Gleichung die zu bestimmende Function y von x und Ableitungen derselben nach x, so heißt sie von der n^{ten} Ordnung, wenn keine höhere Ableitung als $\partial^n y_x$ in ihr vorkommt, und vom m^{ten} Grade, wenn m der höchste Exponent von y oder einer Ableitung von y nach x in ihr ist. Ist m = 1, so heißt die Gleichung eine lineäre, und ihre allgemeine Form ist:

$$\partial^n y_x + A_x \cdot \partial^{n-1} y_x + \dots + P_x \cdot \partial y_x + Q_x \cdot y + R_x = 0 .$$

Eine solche lineäre Gleichung heißt **reducirt**, wenn $R = 0$ ist, außerdem **vollständig**.

Es genüge hier die allgemeine Integration der vollständigen lineären Differenzial-Gleichung von der ersten Ordnung, also von der Form

$$\partial y_x + A_x \cdot y + B_x = 0$$

und der reducirten lineären Gleichung der zweiten Ordnung, also von der Form

$$\partial^2 y_x + A \cdot \partial y_x + B \cdot y = 0,$$

jedoch bei der Voraussetzung, daß im letzteren Falle A und B constant sind, auszuführen.

1. Integration der Gleichung:

$$\partial y + A_x \cdot y + B_x = 0 .$$

Für den Fall, daß $B = 0$ wäre, folgte sogleich $\frac{\partial y_x}{y} + A = 0$ und hieraus $\ln y + \int A_x dx = \text{Const};$ also $y = \text{Const} \cdot e^{-\int A dx}$, und es ist nicht unwahrscheinlich, daß der vollständigen Gleichung dieselbe Form, nur mit einem veränderlichen Factor z_x statt des constanten, genügen könnte. Versucht man es daher mit $y = z_x \cdot e^{-\int A dx}$ und substituirt diesen Ausdruck und seine erste Ableitung nach x, für y und ∂y_x in die gegebene Gleichung, so erhält man sogleich, unter a eine beliebige Constante verstanden, $z = a - \int B \cdot e^{\int A dx} dx$, und es ist daher zu $\partial y_x + A y + B = 0$, das allgemeine Integral:

$$y = \left[a - \int B e^{\int A dx} dx\right] \cdot e^{-\int A dx} .$$

2. Integration der Gleichung:

$$\partial^2 y_x + A \partial y + B \cdot y = 0 .$$

Versteht man unter C, D, n und m Constanten, und setzt nach der Methode der unbestimmten Coefficienten

und Exponenten $y = C \cdot e^{nx} + D \cdot e^{mx}$, so geht die gegebene Gleichung über in

$$C \cdot e^{nx}[n^2 + An + B] + De^{mx}[m^2 + Am + B] = 0$$

und wird erfüllt für $n = -\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}$ und $m = -\frac{A}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}$, aber nicht für $n = m$, weil dann die Stammfunction die Gestalt $y = (C+D)e^{nx}$ annehmen, also nur eine Constante $C+D$ enthalten würde, da doch das Integral einer Ableitung der zweiten Ordnung nothwendig zwei willkührliche Constanten enthalten muß. Man hat daher unter n und m die beiden Werthe $-\frac{A}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{A}{2}\right)^2 - B}$ verstanden, zur Gleichung $\partial^2 y_x + A\partial y_x + By = 0$ das allgemeine vollständige Ur-Integral $y = Ce^{nx} + De^{mx}$, worin C und D zwei willkührliche Constanten bezeichnen.

Für den besondern Fall, daß $\left(\frac{A}{2}\right)^2 = B$ ist, also für die Gleichung $\partial^2 y_x + A\partial y_x + \frac{A^2}{4}y = 0$; entstünde hiernach: $y = \text{Const} \cdot e^{-\frac{A}{2}x}$, welches Resultat, da es nur eine willkührliche Constante enthält, das allgemeine Ur-Integral nicht sein kann. Urtheilt man daher wie in 1, indem man es mit einem veränderlichen Factor z_x statt des constanten versucht, also $y = z \cdot e^{-\frac{A}{2}x}$ setzt, so entsteht, wenn man diesen Ausdruck und seine erste und zweite Ableitung in die gegebene Gleichung substituirt, die Bedingung $\partial^2 z_x = 0$, woraus $\partial z_x = a$ und hieraus $z = ax + b$ folgt. Es entspricht daher der Gleichung

$$\partial^2 y_x + A\partial y_x + \frac{A^2}{4}y = 0$$

das Integral $y = (ax + b) \cdot e^{-\frac{A}{2}x}$ mit den beiden willkührlichen Constanten a und b.

Tritt der Fall ein, daß die Werthe für n und m in imaginärer Form erscheinen, so daß der eine durch $p + qi$, der andere durch $p - qi$ auszudrücken ist, also p den Ausdruck $-\frac{A}{2}$; q aber den absoluten Werth von $\sqrt{B - \left(\frac{A}{2}\right)^2}$ bezeichnet, so geht das allgemeine Integral $y = Ce^{nx} + De^{mx}$ über in $y = e^{px}[C \cdot e^{iqx} + De^{-iqx}]$, oder, nach §. 17, in

$$y = e^{px}[(C + D) \operatorname{Cos} qx + i(C - D) \operatorname{Sin} qx],$$

und man hat also, $C + D$ durch a und $i(C - D)$ durch b ausgedrückt,

$$y = e^{px}[a \operatorname{Cos} qx + b \operatorname{Sin} qx],$$

worinnen a und b die beiden willkührlichen Constanten bezeichnen.

In einfachen Fällen ergiebt sich auch öfter das gesuchte Intregal, auch bei Gleichungen höheren Grades, wenn entweder: und zwar für eine Differenzial-Gleichung der ersten Ordnung, aus ihr ∂y_x blos durch x oder ∂x_y blos durch y auszudrücken, d. h. aus der Differenzial-Gleichung eine Differenzial-Formel zu bilden ist, oder: wenn für eine Differenzial-Gleichung jeder Ordnung, ein Factor (der **integrirende Factor** genannt) leicht zu entdecken ist, welcher, nachdem die Gleichung mit ihm multiplicirt ist, derselben eine integrable Form giebt.

Beispiele.

1) $3y + 2\partial y_x = 5$.

Nach 1) folgt sogleich $y = \frac{5}{3} + a \cdot e^{-\frac{3x}{2}}$. Es ergiebt sich aber auch $\partial x_y = \frac{2}{5 - 3y}$; also

$$x = \int \frac{2}{5-3y} dy = C - \frac{2}{3} \ln(5-3y),$$

wodurch dieselbe Relation zwischen x und y ausgedrückt ist.

2) $y^2 - ax\partial y_x = 0$. Diese Differenzial-Gleichung zweiten Grades mit dem integrirenden Factor $\frac{1}{y^2 x}$ multiplicirt, giebt $\frac{1}{x} - ay^{-2}\partial y_x = 0$, woraus $\ln x + \frac{a}{y} = \text{Const}$; also $y = a : \ln\frac{x}{b}$ folgt, und b eine willkührliche Constante ist.

3) $xy\partial y_x = a + by^2$. Mit Hülfe des integrirenden Factors $\frac{1}{x(a+by^2)}$ ergiebt sich:

$$\ln(a+by^2) = 2b\ln x + C$$

und hieraus auch

$$y = \sqrt{\frac{A \cdot x^{2b} - a}{b}},$$

worinnen A eine willkührliche Constante ausdrückt.

4) $y + x\partial y_x + x^4 y^2 = 0$. Der integrirende Factor $\frac{1}{x^2 y^2}$ giebt sogleich

$$(xy)^{-2} \cdot \partial(xy)_x + x^2 = 0, \text{ woraus}$$

$$y = \frac{3}{x^4 - ax} \text{ folgt.}$$

5) $x\partial y_x - y - x^3 y^2 = 0$; hier entsteht, mit $\frac{-1}{y^2}$ multiplicirt $\partial\left(\frac{x}{y}\right)_x + x^3 = 0$, woraus sich $y = \frac{4x}{a - x^4}$ ergiebt.

6) $\partial^2 y_x = ay$.

Nach 2) folgt sogleich $y = Ae^{x\sqrt{a}} + B\cdot e^{-x\sqrt{a}}$; oder auch, mit $2\cdot\partial y_x$ als integrirenden Factor multiplicirt und zum erstenmal integrirt, $\partial y_x^2 = ay^2 + b$ oder $\frac{\partial y_x}{\sqrt{ay^2+b}} = 1$, wozu das Integral

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\cdot \ln(y\sqrt{a} + \sqrt{ay^2+b}) = x + C \text{ ist.}$$

§. 33.

Zwei für Anwendungen wichtige Sätze.

1. Ist $y = y_x$ und bezeichnen dx und dy zusammengehörige Aenderungen von x und y, so ist nach §. 6:

$$dy = \partial y_x\cdot dx + \partial^2 y_x\cdot\frac{(dx)^2}{(2)} + \ldots.$$

folglich, wenn dx unendlich klein gedacht wird, nach §. 5:

$$dy = \partial y_x\cdot dx; \text{ also auch}$$

$$\frac{dy}{dx} = \partial y_x.$$

Diese unendlich kleinen zusammengehörigen Aenderungen dx und dy nennt man **Differenziale** und $\frac{dy}{dx}$ den **Differenzial-Quotienten**, welcher daher mit der ersten Ableitung oder dem ersten Differenzial-Coefficienten einerlei ist.

2. Bezeichnet y eine Function von x und wird ∂y_x durch z ausgedrückt, so ist $\partial^2 y_x = \partial z_x$; $\partial^3 y_x = \partial^2 z_x$ u. s. w. und auch $\int z\partial x = y$, also, wenn dieses Integral zwischen den Grenzen a und b gedacht wird ($b > a$ verstanden) $y_b - y_a = \int_{b\div a} z\,dx$. Denkt man sich nun a als erstes und b als $(n+1)^{\text{tes}}$ Glied einer gewöhn-

lichen arithmetischen Progression von $n+1$ Gliedern, deren Differenz dann $= \frac{b-a}{n} = k$ ist, und setzt in die Taylorsche Reihe

$$y_{x+k} - y_x = \partial y_x \cdot k + \partial^2 y_x \cdot \frac{k^2}{2} + \partial^3 y_x \cdot \frac{k^3}{(3)} + \ldots.$$

obige Ausdrücke für ∂y_x, $\partial^2 y_x$, $\partial^3 y_x \ldots.$ und allmählig für x die Glieder a, $a+k$, $a+2k \ldots.$ $b-k$, b der obigen Progression, so entsteht

$$y_{a+k} - y_a = z_a \cdot k + (\partial z_x)_a \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots.$$

$$y_{a+2k} - y_{a+k} = z_{a+k} \cdot k + (\partial z_x)_{a+k} \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots.$$

$$y_{a+3k} - y_{a+2k} = z_{a+2k} \cdot k + (\partial z_x)_{a+2k} \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots.$$

u. s. w. bis

$$y_{b-k} - y_{b-2k} = z_{b-2k} \cdot k + (\partial z_x)_{b-2k} \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots. \text{ und}$$

$$y_b - y_{b-k} = z_{b-k} \cdot k + (\partial z_x)_{b-k} \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots.$$

und die Summe dieser Gleichungen giebt

$$y_b - y_a = z_a \cdot k + z_{a+k} \cdot k + z_{a+2k} \cdot k + \ldots. + z_{b-k} \cdot k$$
$$+ (\partial z_x)_a \cdot \frac{k^2}{2} + (\partial z_x)_{a+k} \cdot \frac{k^2}{2} + \ldots. + (\partial z_x)_{b-k} \cdot \frac{k^2}{2}$$

u. s. w. u. s. w.

Stellt man sich nun k unendlich klein, also n unendlich groß vor, und bezeichnet diese unendlich kleine, aber constante Differenz k jeder zwei unmittelbar auf einander folgenden Werthe von x durch dx (Differenzial von x), so hat man, vorausgesetzt daß keiner der Coefficienten der Potenzen von $k = dz$ die Form $\frac{1}{0}$ annimmt, nach §. 5.

$$y_b - y_a = z_a \cdot dz + z_{a+dx} \cdot dz + z_{a+2dx} dx + \ldots. + z_{b-dx} \cdot dx.$$

Versteht man nun unter $\Sigma(z\,dx)$, den Ausdruck rechts des Gleichheitszeichens, also die Summe aller der unendlich vielen, unendlich kleinen und unendlich wenig von einander verschiedenen Producte, die alle durch $z \cdot dx$ vorgestellt sind, wenn man in z für x nach der Folge a, $a + dx$, $a + 2dx \ldots$ bis $a + (n - 1)dx$ oder $b - dx$ schreibt, und setzt zugleich $\int_{b \div a} z\,dx$ für $y_b - y_a$, so hat man die wichtige Gleichung

$$\int_{b \div a} z\,dx = \Sigma[z \cdot dx],$$

in welcher links dx die Worte: nach x zu integriren, rechts aber wirklich einen Factor und zwar einen unendlich kleinen, vorstellt.

Höhere Geometrie.

(§. 34 bis 63.)

I.

Zeichensprache. Allgemeine Begriffe. Angabe der Gegenstände.

§. 34.

Zeichensprache. Begriffe.

1. Denkt man sich auf einer geraden Linie X, von einem beliebig in ihr gewählten Anfangspunkt O ab, unendlich viele, unendlich wenig von einander verschiedene Werthe von x in derselben Richtung abgetragen, in jedem Endpunkt eine Normale auf einerlei Seite dieser Linie, in einer und derselben durch sie gelegten Ebene, errichtet, und jedesmal diese Normale so lang genommen, als der zugehörige Werth von y aus einer zwischen x und y gegebenen Gleichung $P_{x,y} = 0$ sich ergiebt, so bestimmen die Endpunkte aller dieser unendlich nahe an einander liegenden Werthe von y, den Fortgang einer Linie in der gewählten Ebene, welche gerade, auch krumm sein kann, und im letzteren Fall eine ebene Curve genannt wird. Die Natur der Gleichung $P_{x,y} = 0$ giebt zugleich der entsprechenden Curve ihren Namen, und so giebt es algebraische und transcendente Curven, erstere von allen Graden, je nach der Gestalt der zum Grunde gelegten Coordinaten-Gleichung $P_{x,y} = 0$. Man kann die Coordinaten-Werthe von x und y (auch Abscissen und Ordinaten genannt) auch unter einem constanten schiefen Winkel sich aufgetragen vorstellen, jedoch wird immer ein rechter Winkel vorausgesetzt, wenn nicht das Gegentheil bestimmt ausgesprochen ist.

Die Entstehungsart einer ebenen Curve kann auch auf folgende Weise festgestellt werden. Wählt man in einer Ebene eine gerade Linie, in ihr willkührlich einen Punkt O als Scheitelpunkt, denkt sich dann für unendlich viele, unendlich wenig von einander verschiedene Werthe von φ, Winkel in dieser Ebene mit der gewählten Linie zum Scheitelpunkt O gebildet, und den jedesmaligen neuen Schenkel so lang gemacht, als der Werth von r aus einer zwischen r und φ stattfindenden Gleichung $P_{r,\varphi} = 0$ sich ergiebt, so bestimmen die Endpunkte aller dieser unendlich nahe an einander liegenden Werthe von r den Fortgang der, der Gleichung $P_{r,\varphi} = 0$ zugehörigen Linie, welche gerade oder krumm sein kann. Eine solche Gleichung heißt: Polar-Gleichung, r der Radius-Vektor, φ der Polar-Winkel und O der Pol; in Gemeinschaft nennt man auch r und φ Polar-Coordinaten. Zur Vergleichung ergeben sich leicht für jeden Punkt der Curve die Gleichungen: $x = r \operatorname{Cos} \varphi$; $y = r \operatorname{Sin} \varphi$ und $x^2 + y^2 = r^2$. Die Werthe von $\left\{\begin{matrix} x \\ r \end{matrix}\right\}$, für welche $\left\{\begin{matrix} y \\ \varphi \end{matrix}\right\}$ gleich Null wird, geben die Durchschnittspunkte der Curve mit der Achse X, so wie die Werthe von $\left\{\begin{matrix} y \\ r \end{matrix}\right\}$, für welche $\left\{\begin{matrix} x = 0 \\ \varphi = \frac{\pi}{2} \end{matrix}\right\}$ wird, diejenigen mit der zweiten Coordinaten-Achse Y, im Fall einer oder mehr solche Durchschnittspunkte existiren.

2. Hat man eine Gleichung zwischen drei Veränderlichen x, y, z, etwa $P_{x,y,z} = 0$, denkt sich dann drei auf einander normale Coordinaten-Achsen OX, OY, OZ, und in allen Punkten von OX, also für alle unendlich viele, unendlich wenig von einander verschiedene Werthe von x, Parallelen mit OY gezogen, und in allen Punkten jeder derselben, also jedesmal für unendlich viele, unendlich wenig von einander verschiedene Werthe von y, Parallelen mit OZ, also Normalen auf die Coordinaten-Ebene XOY errichtet und jedesmal so lang ge-

nommen, als sich z aus der Gleichung $P_{x,y,z} = 0$ für die zugehörigen Werthe von x und y ergiebt, so bilden die Endpunkte aller dieser Normalen z eine Fläche, welche eben, so wie auch gekrümmt ausfallen kann, und die Coordinaten-Gleichung $P_{x,y,z} = 0$ ist dann der Repräsentant der ihr entsprechenden Fläche, welche nach der Gestalt dieser Gleichung algebraisch von irgend einem Grade oder auch transcendent genannt wird.

Die Entstehungsart einer Fläche kann auch, eben so wie die einer ebenen Curve, durch eine Polar-Gleichung $P_{r,\varphi,\mu} = 0$ bestimmt werden, wenn φ alle die unendlich vielen, unendlich wenig von einander verschiedenen Winkel bezeichnet, welche Linien l aus dem Pol O in der Ebene XOY gezogen mit OX bilden, μ aber für jede solche Linie l alle die unendlich vielen, unendlich wenig von einander verschiedenen Winkel, welche Linien L aus O in der Ebene lZ gedacht, mit l einschließen, und dann endlich r den aus der Gleichung $P_{r,\varphi,\mu} = 0$ zu entwickelnden Werth des Radius-Vectors ausdrückt, welche Länge jedesmal von O aus auf L abgetragen zu denken ist. Die Endpunkte aller dieser Werthe von r liegen dann in der durch die Gleichung $P_{r,\varphi,\mu} = 0$ bestimmten Fläche, und diese Gleichung repräsentirt dieselbe. Eine solche Gleichung heißt dann ebenfalls Polar-Gleichung, so wie φ und μ die Polar-Winkel. Zur Vergleichung hat man dann auch für jeden Punkt der Fläche: $x = r \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Cos}\varphi$; $y = r \operatorname{Cos}\mu \operatorname{Sin}\varphi$; $z = r \operatorname{Sin}\mu$ und $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

Durchschneidet eine solche Fläche eine, zwei oder auch alle drei Coordinaten-Ebenen, so heißen die entstehenden Curven die Grundschnitte und es ergiebt sich:

der Grundschnitt mit XOY für $z = 0$, so wie für $\mu = 0$;
der mit XOZ für $y = 0$, so wie für $\varphi = 0$ und
der mit YOZ für $x = 0$, so wie für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

3. Sind in Beziehung auf dieselben Coordinaten-Achsen X, Y, Z und denselben Anfangspunkt O zwei Flächen durch ihre Gleichungen $P_{x,y,z} = 0$ und $Q_{x,y,z} = 0$ gegeben, so können beide sich durchschneiden, und tritt dies ein, so haben beide Gleichungen gemeinschaftliche Werthe für x, y, z, so daß immer zwei derselben als Functionen des dritten erscheinen. Die beiden Gleichungen entsprechende Durchschnittslinie kann gerade auch krumm, und im letzteren Fall entweder eine ebene Curve, oder auch eine Curve von doppelter Krümmung sein, d. h. eine solche, deren Elemente nicht alle in einer einzigen Ebene liegen.

Die in Gleichungen für Curven und Flächen vorkommenden constanten Factoren werden die Parameter derselben genannt.

§. 35.

Uebertragung auf andere Coordinaten-Achsen.

Lehrsatz. Wenn die Coordinaten-Gleichung einer ebenen Curve für irgend ein Paar Coordinaten-Achsen X, Y, vom n^{ten} Grad ist, so bleibt dieser Grad derselbe, wie auch in derselben Ebene andere Coordinaten-Achsen gewählt werden mögen.

Ist O der Anfangspunkt für die alten Coordinaten-Achsen X, Y; O′ der für die neuen U, W; a, b die Coordinaten für den Punkt O′ in Beziehung auf X, Y und α der Winkel, welchen X mit U bildet, so ergiebt sich leicht

$$x = a + u \operatorname{Cos} \alpha - w \operatorname{Sin} \alpha \text{ und}$$
$$y = b + u \operatorname{Sin} \alpha + w \operatorname{Cos} \alpha;$$

und substituirt man diese Werthe in die gegebene Gleichung $P_{x,y} = 0$, so bleibt für die neue $Q_{u,w} = 0$, weil obige Ausdrücke für x und y in Beziehung auf u und w vom ersten Grade sind, der Grad der Gleichung unverändert derselbe.

Dasselbe Gesetz läßt sich in Beziehung auf Gleichungen für Flächen eben so beweisen.

§. 36.

Gegenstände der Untersuchungen.

Die Gegenstände der Untersuchungen sind vorzüglich folgende:

Aus der gegebenen Gleichung für eine ebene Curve oder für eine Fläche, oder aus zwei gegebenen Gleichungen für eine Curve doppelter Krümmung die Gestalt der Curve oder der Fläche zu beurtheilen; den Grad der Krümmung an gegebenen Stellen zu bestimmen; zu ermitteln, ob an bestimmten Stellen die Krümmung concav oder convex ist, oder ob ein Uebergang aus dem einen in das andere stattfindet, welcher Punkt bei einer Curve der Wendungspunkt heißt; berührende Gerade oder Tangenten für Curven, tangentirende Ebenen für Flächen zu bestimmen; zu ermitteln ob eine ebene Curve Achsen hat, d. h. ob in ihrer Ebene Linien existiren, zu welchen beiderseits derselben die Ordinaten von gleicher Größe sind, in welchem Fall der Durchschnittspunkt jeder Achse mit der Curve ein Scheitelpunkt derselben genannt wird; Asymptoten, wenn sie existiren, zu entdecken, d. h. gerade Linien, die sich einer ebenen Curve immer mehr nähern, ohne sie je zu erreichen; die Länge einer Curve zwischen gegebenen Grenzpunkten derselben zu finden, d. h. die Curve rectificiren; den ebenen Flächenraum aufzusuchen, welchen ein Bogen der Curve, die Abscissen-Achse und die beiden Ordinaten begränzen, welche den Endpunkten des Bogens angehören, d. h. quadriren; eben so den Flächeninhalt einer krummen Fläche zwischen bestimmten Grenzen, so wie den körperlichen Inhalt eines Raumes, der ganz oder zum Theil von einer krummen Fläche begränzt ist, zu ermitteln; zu untersuchen, ob eine Curve Knoten hat, d. h. ob Punkte in ihr existiren, durch welche dieselbe zweimal oder mehreremal hindurch geht; u. s. w. u. s. w.

II.

Herleitung der Gleichungen für die gerade Linie, die Kreislinie, die Ebene und Kugelfläche, als Gegenstände der Elementar-Geometrie, und Folgerungen aus diesen Gleichungen.

§. 37.

Die gerade Linie.

Bezeichnen a, a′ und b, b′ die Coordinaten zweier Punkte A, B; x, y die zusammengehörigen Coordinaten jedes Punktes in der Richtung der Geraden durch A und B, und man denkt sich durch den einen dieser beiden Punkte eine Parallele mit der Coordinaten-Achse X, so bilden sich ähnliche Dreiecke, deren homologe Seiten $b - a$, $x - a$ und $b' - a'$, $y - a'$ sind, und aus der entstehenden Proportion folgt:

$$(b - a)y = (b' - a')x + a'b - ab'$$

als Gleichung für die gerade Linie, welche daher vom ersten Grade ist.

Jede Gleichung $P_{x,y} = 0$ repräsentirt daher, wenn sie vom ersten Grade ist, eine gerade Linie, und ihre allgemeine Form ist:

$$py + qx + r = 0; \text{ oder } y + cx + d = 0,$$

oder $Ay + Bx + 1 = 0$, so wie auch: $y = n + mx$, und in der letzten Form drückt n die Ordinate zu $x = 0$ und m die Tangente des Winkels aus, welchen die dieser Gleichung entsprechende Gerade mit OX bildet. Die Gerade hat daher zwei Parameter.

Aus der Gleichung für die gerade Linie folgen leicht folgende Wahrheiten.

1. Die Gerade $ay + bx + c = 0$ schneidet die Achse X in der Entfernung $-\frac{c}{b}$ von O und die Achse Y in der

Entfernung $-\frac{c}{a}$ von O, denn erstere entspricht der Ordinate $y = 0$, letztere der Abscisse $x = 0$.

2. Die Gerade $o \cdot y + bx + c = 0$ oder $bx + c = 0$ läuft mit OY in der Entfernung $-\frac{c}{b}$ parallel, denn die Gleichung giebt zu jedem Werth von y allemal $x = -\frac{c}{b}$.

3. Die Gerade $ay + ox + c = 0$ oder $ay + c = 0$ liegt mit OX in der Entfernung $-\frac{c}{a}$ parallel.

4. Die beiden Geraden $ay + bx + c = 0$ und $py + qx + r = 0$ sind parallel, wenn $\frac{b}{a} = \frac{q}{b}$ ist, denn $-\frac{b}{a}$ und $-\frac{q}{b}$ sind die Tangenten ihrer Gegenwinkel mit OX.

5. Wenn die beiden Geraden $ay + bx + c = 0$ und $py + qx + r = 0$ sich schneiden, und x', y' die Coordinaten des Durchschnittspunktes, α aber den Winkel beider Geraden bezeichnet, so ist $x' = \frac{cp - ar}{aq - bp}$; $y' = \frac{cq - br}{aq - bp}$; und $\tang \alpha = \frac{bp - aq}{ap + bq}$. Beide schneiden sich daher unter einem rechten Winkel, wenn $ap + bq = 0$ ist.

6. Für die Gerade, deren Coordinaten-Gleichung $ay + bx + c = 0$ ist; ist, O als Pol gewählt, die Polar-Gleichung $ar \operatorname{Sin}\varphi + br \operatorname{Cos}\varphi + c = 0$; oder wenn α den Winkel dieser geraden mit OX bezeichnet, weil dann $-\operatorname{tg}\alpha$ für $\frac{b}{a}$ gesetzt werden kann,

$$r \operatorname{Sin}(\alpha - \varphi) = \frac{c}{a} \operatorname{Cos}\alpha .$$

§. 38.

Die Kreislinie.

Ist ein Kreis nach seiner Lage gegen die Coordinaten-Achsen X, Y durch die Coordinaten a, b seines Mittelpunktes, und seiner Größe nach, durch seinen Halbmesser r gegeben, so entsteht für denselben durch bloße Anwendung des pythagoräischen Lehrsatzes leicht die Gleichung

$$(\pm a \mp x)^2 + (\pm b \mp y)^2 = r^2,$$

deren allgemeine Form also

$$y^2 + x^2 + Ay + Bx + C = 0, \text{ oder auch}$$
$$Ay^2 + Ax^2 + By + Cx + D = 0, \text{ so wie auch}$$
$$Ay^2 + Ax^2 + By + Cx + 1 = 0 \text{ ist.}$$

Die Kreislinie ist demnach eine algebraische Curve vom zweiten Grade mit drei Parametern, in welcher die Coefficienten von y^2 und x^2 einander gleich sind, der Coefficient von xy aber $= 0$ ist. Für $a = 0$ und $b = 0$ wird die Gleichung $y^2 + x^2 = r^2$; für $a = r$ und $b = 0$ aber $y^2 = 2rx - x^2$, welche beide Gleichungen aus der Elementar-Geometrie bekannt sind. Ohne Schwierigkeit ergeben sich noch folgende Wahrheiten:

1. Aus der Gleichung $y^2 + x^2 + Ay + Bx + C = 0$ für einen Kreis entspringt die Abscisse seines Mittelpunktes, also $a = -\frac{B}{2}$; die Ordinate desselben also $b = -\frac{A}{2}$ und der Halbmesser r desselben $= \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$.

2. Zwei durch ihre Gleichungen in Beziehung auf dieselben Coordinaten-Achsen gegebenen Kreise schneiden sich in zwei Punkten, deren gerade Verbindungslinie parallel mit $\left\{\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\}$ liegt, wenn nur ein einziger, beiden Gleichun-

gen entsprechender Werth von $\left\{ \begin{matrix} y \\ x \end{matrix} \right\}$ existirt, zu welchen zwei Werthe von $\left\{ \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \right\}$ beiden Gleichungen genügen.

3. Zwei durch ihre Gleichungen in Beziehung auf dieselben Coordinaten-Achsen gegebene Kreise schneiden sich in zwei Punkten, deren gerade Verbindungslinie weder mit X noch mit Y parallel liegt, wenn zwei, beiden Gleichungen genügende Werthe für x existiren und zu jedem derselben einer der beiden zugehörigen Werthe von y beiden Gleichungen angehört.

4. Zwei Kreise berühren sich, wenn für beide, auf dieselben Coordinaten-Achsen bezogenen, Gleichungen nur ein Werth von x und zu diesen nur ein Werth von y jeder von ihnen genügt.

Beispiele.

1. Welche Lagen haben die beiden Kreise zu den Gleichungen $y^2 + x^2 - 6y - 8x + 21 = 0$ und $y^2 + x^2 - 6y - 18x + 74 = 0$?

   Sie durchschneiden sich in den Punkten
   zu $x = 5,3$ und $y = 3 - \sqrt{2,31}$ und
   zu $x = 5,3$ und $y = 3 + \sqrt{2,31}$.

2. Welche Lage haben folgende zwei Kreise?

$$y^2 + x^2 - 10y - 2x + 22 = 0 \text{ und}$$
$$y^2 + x^2 - 16y - 6x + 64 = 0.$$

   Sie durchschneiden sich in den Punkten zu $x = 3$; $y = 5$ und zu $x = \frac{3}{13}$; $y = \frac{89}{13}$.

3. Welche Lage haben folgende zwei Kreise?
   $y^2 + x^2 - 4y = 0$ und $y^2 + x^2 - 10y - 8x + 32 = 0$.

   Sie berühren sich in dem Punkt zu $x = \frac{8}{5}$; $y = \frac{16}{5}$ und zwar außerhalb.

§. 39.

Die Ebene.

Ist $P_{x,y,z} = 0$ die, ihrer Form nach, zu bestimmende Gleichung der Ebene, so muß dieselbe, für $z = 0$, den Grundschnitt der Ebene mit der Coordinaten-Ebene XOY liefern, folglich, weil zwei Ebenen sich in einer Geraden schneiden, in die Gleichung einer geraden Linie übergehen, also die Gestalt $By + Cx + D = 0$ annehmen.

Eben so erhellet, daß $P_{x,y,z} = 0$ die Form $Az + Cx + D = 0$ erhalten muß, wenn $y = 0$ ist, und die: $Az + By + D = 0$, wenn $x = 0$ ist, woraus hervorgeht, daß die allgemeine Coordinaten-Gleichung der Ebene jede der Coordinaten x, y, z in der ersten Potenz und noch ein constantes Glied enthalten wird, so daß also eine Gleichung des ersten Grades von der Form: $Az + By + Cx + D = 0$ oder $z + Ay + Bx + C = 0$ oder $Az + By + Cx + 1 = 0$ der allgemeine Repräsentant einer Ebene ist.

Aus dieser Gleichung ergeben sich folgende Bestimmungen.

1. Die Gleichung $By + Cx + D = 0$ als Gleichung einer Ebene, also in der Form $o \cdot z + By + Cx + D = 0$ gedacht, stellt diejenige Ebene vor, welche mit dem Grundschnitt $A \cdot 0 + By + Cx + D = 0$ oder $By + Cx + D = 0$ auf der Coordinaten-Ebene XOY normal steht, denn für alle zusammengehörige Werthe von x und y bleibt z völlig unbestimmt, kann also alle mögliche Werthe haben.
2. Die Gleichung $Cx + D = 0$ als Gleichung einer Ebene, also in der Form $o \cdot z + 0 \cdot y + Cx + D = 0$ gedacht, giebt diejenige Ebene an, welche auf OX in der Entfernung $-\frac{D}{C}$ von O normal steht.
3. Soll eine Ebene durch einen gegebenen Punkt a, b, c (d. h. durch den Punkt für welchen $x = a$; $y = b$, $z =$ ist) gehen, so müssen die Coefficienten A, B, C, D,



d. h.: die drei Parameter $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$ dieser Bedingung entsprechen, d. h. es muß, wenn $Az + By + Cx + D = 0$ die verlangte Gleichung vorstellt, auch

$$Ac + Bb + Ca + D = 0$$

werden, und bestimmt man hieraus einen der Coefficienten, etwa D, und substituirt seinen Werth, so ist die verlangte Gleichung

$$A(z - c) + B(y - b) + C(x - a) = 0 .$$

Eben so bestimmt sich die Gleichung, wenn die Ebene durch zwei oder durch drei gegebene Punkte gehen soll.

4. Die beiden Ebenen $Az + By + Cx + D = 0$ und $A'z + B'y + C'x + D' = 0$ sind parallel, wenn $A : A' = B : B' = C : C'$ ist, denn dann sind zwei Paare ihrer Grundschnitte parallel (§. 37. 4.).

5. Bezeichnet R den Ausdruck $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ und α, β, γ die Winkel, welche die Ebene $Az + By + Cx + D = 0$ mit den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ bildet, h aber die Normale aus O auf diese Ebene, so ist

$\operatorname{Cos}\alpha = A : R$; $\operatorname{Cos}\beta = B : R$; $\operatorname{Cos}\gamma = C : R$ und $h = -D : R$; denn es ist auch $\angle hZ = \alpha$; $hY = \beta$, $hX = \gamma$ also $z\operatorname{Cos}\alpha + y\operatorname{Cos}\beta + x\operatorname{Cos}\gamma = h$,

und bringt man diese und die gegebene Gleichung der Ebene auf einerlei Form, nämlich auf die:

$$z + \frac{\operatorname{Cos}\beta}{\operatorname{Cos}\alpha} \cdot y + \frac{\operatorname{Cos}\gamma}{\operatorname{Cos}\alpha} \cdot x - \frac{h}{\operatorname{Cos}\alpha} = 0 \text{ und}$$

$$z + \frac{B}{A} y + \frac{C}{A} x + \frac{D}{A} = 0,$$

so folgen aus der Gleichsetzung der Coefficienten und aus der Gleichung $\operatorname{Cos}^2\alpha + \operatorname{Cos}^2\beta + \operatorname{Cos}^2\gamma = 1$ die vier angegebenen Formeln.

6. Bezeichnet R den Ausdruck $\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$; R′ den $\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}$ und δ den Winkel, welchen die beiden Ebenen $Az + By + Cx + D = 0$ und $A'z + B'y + C'x + D' = 0$ mit einander bilden, so ist

$$\mathrm{Cos}\,\delta = [A \cdot A' + B \cdot B' + C \cdot C'] : [R \cdot R'] .$$

Versteht man nämlich unter α, β, γ die drei Winkel, welche die erstere Ebene, und unter α', β', γ' die, welche die zweite Ebene mit den drei Coordinaten-Ebenen XY, XZ, YZ bildet, so ist $\mathrm{Cos}\,\delta = \mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\alpha' + \mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta' + \mathrm{Cos}\,\gamma\,\mathrm{Cos}\,\gamma'$, und hieraus und aus 5. folgt obige Formel.

Beide Ebenen stehen daher auf einander normal, wenn $AA' + BB' + CC' = 0$ ist, und sind parallel wenn $AA' + BB' + CC' = RR'$ ist, aus welcher Gleichung auch die Wahrheit der Behauptung in 4. hervorgeht.

7. Eine Gerade im Raum ist ihrer Lage nach gegeben, wenn man die Projectionen derselben auf zwei Coordinaten-Ebenen kennt; sind also letztere etwa durch die beiden Gleichungen $ay + bx + c = 0$ und $pz + qx + r = 0$ gegeben, so kennt man auch erstere, denn die gegebenen beiden Gleichungen sind nach 1. zugleich die der auf den beiden Coordinaten-Ebenen XY und XZ normalen Ebenen, deren Durchschnittslinie erstere ist.

8. Entsprechen den beiden Ebenen

$$Az + By + Cx + D = 0 \text{ und}$$
$$A'z + B'y + C'x + D' = 0$$

gleiche zusammengehörige Coordinaten-Werthe, so schneiden sie sich in einer Geraden L, deren Projectionen auf zwei der drei Coordinaten-Ebenen, etwa auf XY und XZ, man erhält, wenn man aus den gegebenen Gleichungen einmal z, das andere Mal y eliminirt. Die entstehenden

Gleichungen sind von der Form $ay + bx + c = 0$ und $pz + qx + r = 0$ und bestimmen nach 7. die Lage von L.

9. Ist eine Ebene E durch die Gleichung $Az + By + Cx + D = 0$ und eine Gerade L im Raum durch die zwei Gleichungen $ay + bx + c = 0$ und $pz + qx + r = 0$ für ihre Projectionen auf XY und XZ gegeben, so steht L auf E normal, wenn sowohl $aB + bC = 0$ als auch $Ap + Cq = 0$ ist, denn die Grundschnitte von E mit XY und XZ sind

$$By + Cx + D = 0 \text{ und}$$
$$Az + Cx + D = 0$$

und L steht auf E normal, wenn beide Projectionen von L auf den zugehörigen Grundschnitten normal stehen, woraus nach §. 37. 5. die Wahrheit hervorgeht.

Beispiele.

1. Die Gleichung und Lage der Ebene zu bestimmen, welche durch die Punkte 2, 2, 5; 3, 2, 4; 4, 3, 2 geht.

Die Gleichung ist $2z + y + x - 9 = 0$ und diese Ebene schneidet die drei Coordinaten-Achsen in den Entfernungen 9, 9, $\frac{9}{2}$ von O und bildet mit den Ebenen XY, XZ, YZ die Winkel, deren Cosinusse $\sqrt{\frac{2}{3}}$; $\sqrt{\frac{1}{6}}$; $\sqrt{\frac{1}{6}}$ sind.

2. Die Ebene E ist durch die Gleichung $z + 5y - 2x - 10 = 0$ und eine Gerade L durch die beiden Gleichungen $6y + 15x - 20 = 0$ und $6z + 3x - 16 = 0$ gegeben; wie liegt L gegen E?

Es wird die Ebene E von der geraden L normal

durchschnitten, und die Coordinaten des Durchschnittspunktes sind:

$$x = \frac{28}{45};\ y = \frac{80}{45};\ z = \frac{106}{45}.$$

§. 40.

Die Kugelfläche.

Ist eine Kugel nach ihrer Lage gegen die drei Coordinaten-Ebenen durch die Coordinaten $x = a;\ y = b;\ z = c$ ihres Mittelpunkts und nach ihrer Größe durch den Halbmesser derselben $= r$ gegeben, so ist für jeden Punkt ihrer Oberfläche, wenn x, y, z die Coordinaten desselben ausdrücken,

$$(z-c)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 = r^2$$

oder allgemein:

$$z^2 + y^2 + x^2 + Az + By + Cx + D = 0,$$

und die Kugelfläche ist daher eine algebraische Fläche des zweiten Grades mit vier Parametern, in welcher die Coefficienten von z^2, y^2, x^2 sämmtlich einander gleich, die aber von zy, zx, yx sämmtlich gleich Null sind.

Wählt man O im Mittelpunkt der Kugel, also $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, so wird die Gleichung $z^2 + y^2 + x^2 - r^2 = 0$; liegt der Mittelpunkt in einer der Coordinaten-Achsen, etwa in der X, so ist sie $z^2 + y^2 + (x-a)^2 = r^2$; und für $a = r$; blos $z^2 + y^2 + x^2 - 2rx = 0$. Aus der allgemeinen Gleichung für die Kugelfläche $z^2 + y^2 + x^2 + Az + By + Cx + D = 0$ folgen nun unter andern nachstehende Bestimmungen.

1. Es sind für den Mittelpunkt derselben die drei Coordinaten $a = -\frac{C}{2}$; $b = -\frac{B}{2}$; $c = -\frac{A}{2}$; und der Halbmesser selbst oder $r = \frac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2 - 4D}$.
2. Sind die beiden Kugelflächen
$$z^2 + y^2 + x^2 + Az + By + Cx + D = 0 \text{ und}$$
$$z^2 + y^2 + x^2 + A'z + B'y + C'x + D' = 0$$

gegeben, und für beide nach 1. die Coordinaten der Mittelpunkte, nemlich a, b, c, so wie a', b', c' und auch die Halbmesser r und r' bestimmt, so ist dann, wenn e die Centrallinie d. h. die Entfernung ihrer Mittelpunkte von einander ausdrückt, $e^2 = (a - a')^2 + (b - b')^2 + (c - c')^2$, und die beiden Kugeln durchschneiden sich, wenn $r + r' > e$ und die absolute Differenz $r - r' < e$ ist, oder auch: wenn, nachdem aus den beiden Gleichungen eine der Coordinaten, etwa z, eliminirt ist, der entstehenden Eliminations-Gleichung $P_{x,y} = 0$ zusammengehörige reelle Werthe von x und y entsprechen; sie berühren sich, außerhalb wenn $r + r' = e$, innerhalb, wenn die absolute Differenz $r - r' = e$ ist; oder auch: wenn für jede der Coordinaten nur ein Werth existirt, der beiden Gleichungen genügt; sie liegen ganz auseinander, wenn $r + r' < e$; ganz die eine in der andern, wenn die absolute Differenz $r - r' > e$ ist; oder auch: wenn keine zusammengehörige reelle Werthe für die Coordinaten existiren, welche beiden Gleichungen entsprechen.

Beispiel. Wie liegen die beiden Kugeln, deren Gleichungen $z^2 + y^2 + x^2 - 6z - 4y - 10x + 2 = 0$ und
$z^2 + y^2 + x^2 - 8z - 2y - 12x - 11 = 0$ sind?

Für die erste entsteht $a = 5$; $b = 2$; $c = 3$; $r = 6$; für die zweite $a' = 6$; $b' = 1$; $c' = 4$; $r' = 8$; ferner folgt $e = \sqrt{3}$; also ist $r' - r > e$ und die Kugeln liegen daher die eine ganz in der andern. Dieß ergiebt sich auch, wenn man aus beiden Gleichungen etwa z eliminirt und dann aus der Eliminations-Gleichung etwa y entwickelt, wodurch

$$y = \tfrac{1}{4}\left[2x + 23 \pm \sqrt{-12x^2 + 20x - 137}\right]$$

entsteht, und leicht erhellet, daß kein Werth für x existirt, für welchen $-12x^2 + 20x - 137 = p$ positiv, also y reell wird, denn p wird ein Maximum und zwar ein absolutes Maximum

für $x = \frac{6}{5}$ und dieser größtmöglichste Werth von p bleibt noch immer negativ, nämlich $-130,28$, so daß also gemeinschaftliche reelle Coordinaten-Werthe, die beiden Gleichungen Genüge leisten, nicht existiren.

III.

Ermittlung derjenigen in §. 36. erwähnten Gegenstände, deren Bestimmung entweder rein algebraisch oder durch die Differenzial-Rechnung erfolgen kann.

§. 41.

Bestimmung der Lage der Achsen und der Scheitelpunkte jeder algebraischen Curve des zweiten Grades.

Die allgemeine Form einer solchen Gleichung, ist: $Ay^2 + Byx + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$ und da dieselbe im Allgemeinen für jeden Werth von x zwei Werthe für y, und umgekehrt, liefert, so muß es wenigstens eine Achse geben, für welche die beiden zusammengehörigen Ordinaten einander gleich ausfallen. Bezeichnen daher a, b die zu bestimmenden Coordinaten des Scheitelpunkts und α den ebenfalls zu ermittelnden Winkel welchen die Achse X′ mit der Coordinaten-Achse X bilden wird, und man denkt sich im Scheitelpunkt auf X′ eine Normale als zweite neue Coordinaten-Achse Y′, so ist nach §. 35.

$$x = a + x' \operatorname{Cos}\alpha - y' \operatorname{Sin}\alpha;$$
$$y = b + x' \operatorname{Sin}\alpha + y' \operatorname{Cos}\alpha$$

und substituirt man diese Werthe in die gegebene Gleichung, so entsteht für die neuen Coordinaten-Achsen X′ Y′ eine Gleichung von derselben Form wie die gegebene, sie sei durch

$$A' \cdot y'^2 + B'y'x' + C'x'^2 + D'y' + E'x' + F' = 0$$

ausgedrückt, und in dieser Gleichung sind sämmtliche Coefficienten Functionen von a, b und α. Da nun diese Gleichung in Beziehung auf y' eine reine quadratische werden soll, weil sie zu jedem x' zwei gleiche aber entgegengesetzte Werthe für y' liefern muß, so muß der Coefficient von y' d. h. $B' \cdot x' + D' = 0$, also nach §. 2. sowohl $B' = 0$ als auch $D' = 0$ werden. Ferner muß, weil x' und y' zugleich im Scheitelpunkt verschwinden, oder $= 0$ werden sollen, auch $F' = 0$ werden, und aus den drei Gleichungen

$B'_{a, b, \alpha} = 0$; $D'_{a, b, \alpha} = 0$; $F'_{a, b, \alpha} = 0$ sind die verlangten Werthe von a, b und α zu entwickeln. Substituirt man dann dieselben in A', C', E', so hat man in Beziehung auf die neuen Coordinaten-Achsen X', Y' die Gleichung:

$$A' \cdot y'^2 + C'x'^2 + E'x' = 0$$

mit zwei Parametern.

Beispiele.

1. $9 \cdot y^2 - 24yx + 16x^2 - 192y + 6x + 924 = 0.$

Hier entstehen, wenn $(3y - 4x)^2$ für die drei ersten Glieder gesetzt wird, die drei Gleichungen:

$[3\,\mathrm{Cos}\,\alpha + 4\,\mathrm{Sin}\,\alpha][3\,\mathrm{Sin}\,\alpha - 4\,\mathrm{Cos}\,\alpha] = 0$

$(3b - 4a)[3\,\mathrm{Cos}\,\alpha + 4\,\mathrm{Sin}\,\alpha] - 96\,\mathrm{Cos}\,\alpha - 3\,\mathrm{Sin}\,\alpha = 0$

$(3b - 4a)^2 - 192b + 6a + 924 = 0.$

Der ersten geschieht Genüge sowohl für $3\mathrm{Cos}\alpha + 4\mathrm{Sin}\alpha = 0$, als auch für $3\,\mathrm{Sin}\,\alpha - 4\,\mathrm{Cos}\,\alpha = 0$; erstere Bedingung in die zweite Gleichung aufgenommen, führt aber auf einen Widerspruch, und daher ist nur $\mathrm{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, wozu aus den beiden andern Gleichungen sich $a = \frac{6}{5}$ und $b = \frac{28}{5}$ ergiebt. Die verlangte Gleichung selbst wird nach Einführung dieser Werthe $y'^2 - 6x' = 0$, und die Curve hat daher nur eine Achse und einen Scheitelpunkt.

2. $4y^2 + x^2 - 24y - 12x + 68 = 0$.

Für diese Curve entstehen folgende drei Bedingungen: $3 \operatorname{Sin} 2\alpha = 0$; $4(b-3)\operatorname{Cos}\alpha - (a-6)\operatorname{Sin}\alpha = 0$; und $4b^2 + a^2 - 24b - 12a + 68 = 0$
und aus ihnen die Resultate

$$\alpha = 0;\ b = 3;\ a = \begin{Bmatrix} 4 \\ 8 \end{Bmatrix};$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2};\ a = 6;\ b = \begin{Bmatrix} 2 \\ 4 \end{Bmatrix}.$$

Die Curve hat daher zwei Achsen, eine parallel mit X, die andere parallel mit Y und erscheint als eine geschlossene Curve mit vier Scheitelpunkten; zu $\alpha = 0$; $b = 3$; $a = 4$ wird die Gleichung $4y'^2 + x'^2 - 4x' = 0$; zu $\alpha = 0$; $b = 3$; $a = 8$; aber $4y'^2 + x'^2 + 4x' = 0$; ferner zu $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $a = 6$; $b = 2$ wird sie $y'^2 + 4x'^2 - 8x' = 0$ und zu $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $a = 6$; $b = 4$ entsteht $y'^2 + 4x'^2 + 8x' = 0$.

§. 42.

Von den Tangenten und Asymptoten ebener Curven.

Ist $P_{x,y} = 0$ oder $y = y_x$ die gegebene Gleichung einer ebenen Curve; $y = a + bx$ die, der Form nach, bekannte Gleichung einer geraden Linie und sollen deren Parameter a, b der Bedingung gemäß bestimmt werden, daß für einen festgesetzten Punkt der Curve, also für einen bestimmten Werth von x, die Gerade die Tangente der Curve wird, so muß nicht nur $y_x = a + bx$, sondern zugleich auch die Differenz der beiderseits anliegenden Coordinaten der Curve und Tangente ein Minimum werden. Es sind aber, k unendlich klein und

einmal positiv, das andere mal negativ gedacht, die benachbarten beiden Coordinaten der Curve

$$= y_x + \partial y_x \cdot k + \partial^2 y_x \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots .$$

und ebenfalls nach der Taylorschen Reihe, die der Geraden $= a + bx + b \cdot k$; folglich die (absolut gedachte) Differenz beider

$$= (\partial y_x - b) \cdot k + \partial^2 y_x \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots .$$

und diese wird ein (absolutes) Minimum, wenn das erste Glied als dominirend (§. 4. und 5.) verschwindet. Man hat also die Bedingungen $y_x = a + bx$ und $\partial y_x = b$, und hieraus die verlangten Parameter:

$$a = y_x - x \cdot \partial y_x; \; b = \partial y_x;$$

so wie auch, wenn α den Winkel bezeichnet, welchen die so bestimmte Tangente mit der Coordinaten-Achse X bildet, nach §. 37.

$$\operatorname{tg}\alpha = \partial y_x .$$

Bezeichnet D den Berührungspunkt der Tangente mit der Curve, A den Durchschnittspunkt dieser Tangente mit der Achse X der Abscissen, C den Durchschnittspunkt der in D auf AD errichteten Normale ebenfalls mit X, und B den Endpunkt der dem Punkt D entsprechenden Abscisse x, so heißt AB die Subtangente, DC die Normale, BC die Subnormale des Punktes D (Fig. 1.) und es folgt, aus $\operatorname{tg}BAD = \partial y_x$ sogleich noch

$$\text{Subtang.} = \frac{y}{\partial y_x},$$

$$\text{Subn.} = y \partial y_x;$$

so wie der absolute Werth von $AO = \dfrac{y}{\partial y_x} - x.$

Entstehen, wenn x unendlich groß gedacht wird, für $\operatorname{tg}\alpha = \partial y_x$ und auch für $AO = \dfrac{y - x\partial y_x}{\partial y_x}$ endliche Werthe, so bestimmen sie die Lage der Tangente für einen unendlich weit entfernten Punkt der Curve, d. h. die Lage der Asymp-

tote, den Fall ausgenommen, wenn X selbst Asymptote ist, d. h. wenn $tg\alpha = 0$ entsteht.

Beispiel. Für die Curve $y^2 - x^2 - 6x = 0$ entsteht $tg\alpha = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+6x}}$; $Subtg = \frac{x^2+6x}{x+3}$; $Subn = x+3$; auch finden zwei Asymptoten statt, für welche $AO = 3$ und $\alpha = \pm\frac{1}{4}\pi$ sich ergiebt.

§. 43.

Ermittlung, ob eine ebene Curve an einer bestimmten Stelle concav oder convex ist, oder einen Wendungspunkt hat.

Wird an dieser Stelle die Tangente und außer der Ordinate des gegebenen Punkts auch die beiden, zunächst beiderseits, anliegenden Ordinaten sowohl der Curve als der Tangente gedacht, so ist, wenn die Differenz beider auf beiden Seiten negativ erscheint, die Curve gegen X concav, erscheint sie aber positiv, so ist sie convex gegen X. Es ist aber diese Differenz nach §. 42.

$$= \partial^2 y_x \cdot \frac{k^2}{(2)} + \partial^3 y_x \cdot \frac{k^3}{(3)} + \dots$$

und wird mit $\partial^2 y_x$ einerlei Zeichen behalten. Ist daher für den gegebenen Werth von x,

$\partial^2 y_x$ negativ, so ist die Curve an dieser Stelle concav, ist aber

$\partial^2 y_x$ positiv, so ist sie an dieser Stelle convex gegen X. Sollte aber $\partial^2 y_x$ sich für irgend einen Werth von x gleich Null ergeben, so ist an dieser Stelle die Curve weder concav noch convex, und diese Stelle ist dann ein Wendungspunkt, wenn die Curve auf der einen Seite derselben sich concav, auf der andern aber convex ergeben sollte.

Beispiel. Die Curve $y = x^3 - 6x^2 + 8x + 5$ ist concav von $x = -\infty$ bis $x < 2$; convex von $x > 2$ bis $x = \infty$ und hat zu $x = 2$ einen Wendungspunkt.

§. 44.

Bestimmung der Größe oder des Grabs der Krümmung einer ebenen Curve an jeder Stelle derselben durch den Halbmesser der Krümmung.

Ist $y = y_x$ die Gleichung der Curve, P der Punkt derselben, welcher einer bestimmten Abscisse x entspricht, und man denkt sich in derselben Ebene unendlich viele Kreise, deren Peripherien alle durch P gehen, so heißt derjenige dieser Kreise der sich in P am innigsten an die Curve anschließt, so daß zwischen ihn und der Curve weiter kein Kreis existirt, der Krümmungs-Kreis, und sein Radius der Krümmungs-Halbmesser für diese Stelle P. Bezeichnen daher A und B die Coordinaten des Mittelpunkts und R den Halbmesser dieses Krümmungskreises, so ist die Gleichung desselben nach §. 38.

$$(y-B)^2 + (x-A)^2 = R^2, \text{ woraus auch}$$

$$y = B \pm \sqrt{R^2-(x-A)^2};\ \partial y_x = \frac{A-x}{y-B};\ \partial^2 y_x = -\frac{R^2}{(y-B)^3}$$

u. s. w. folgt. Die Werthe der drei Constanten A, B, R sind nun der Bedingung entsprechend zu bestimmen, daß, eben so wie in §. 42., nicht blos der Punkt P der Curve und dem Kreise gemeinschaftlich also $y_x = B \pm \sqrt{R^2-(x-A)^2}$, sondern zugleich auch die Differenz der beiderseits zunächst anliegenden Ordinaten der Curve und des Kreises ein absolutes Minimum werde; diese Differenz ist aber nach Taylors Reihe

$$\left[\partial y_x - \frac{A-x}{y-B}\right]\cdot k + \left[\partial^2 y_x + \frac{R^2}{(y-B)^3}\right]\cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots$$

und wird kleinstmöglichst, wenn so viele der ersteren (also dominirenden) Glieder als irgend möglich, zu Null gemacht werden. Es können aber nur so viel Bedingungen erfüllt werden, als Unbekannte (hier drei) in der Aufgabe vorkommen, und die Bedingungsgleichungen sind daher hier:

$$y = B \pm \sqrt{R^2-(x-A)^2}$$

$$\partial y_x - \frac{A-x}{y-B} = 0 \text{ und}$$

$$\partial^2 y_x + \frac{R^2}{(y-B)^3} = 0, \text{ und aus ihnen erhält man:}$$

$$A = x - \frac{1+\partial y_x^2}{\partial^2 y_x} \cdot \partial y_x;$$

$$B = y + \frac{1+\partial y_x^2}{\partial^2 y_x} \text{ und}$$

$$R = \frac{[1+\partial y_x^2]^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y_x}.$$

Der Werth von B oder auch die zuvor erfolgte Bestimmung, ob die Curve in P concav oder convex ist, entscheidet, auf welcher Seite der Curve der Mittelpunkt der Krümmung liegt.

Für diese gefundenen Werthe von A, B, R ist dann die Differenz der, der gemeinschaftlichen Ordinate in P zunächst anliegenden beiden Ordinaten der Curve und des Kreises

$$= \left[\partial^3 y_x + \frac{3(A-x)R^2}{(y-B)^5}\right] \cdot \frac{k^3}{(3)} + \ldots.$$

und das erste (also dominirende) Glied dieser Reihe wechselt sein Zeichen mit k, so daß also, wenn k verschiedene Zeichen annehmen kann, der gefundene Kreis die Curve in P schneidet, für die Punkte P aber, für welche k nur positiv oder nur negativ existirt, berührt oder oskulirt.

Beispiel. Für $y^2 = 9x$ wird $A = \frac{9}{2} + 3x$; $B = -\frac{4}{3} x \cdot \sqrt{x}$; $R = \frac{1}{6}(9+4x)^{\frac{3}{2}}$, und der Krümmungs-Kreis schneidet die Curve in allen den Punkten P zu positiven Werthen von x, die größer wie Null sind; in dem zu $x = 0$ gehörigem Punkt P aber (im Scheitelpunkt) oskulirt er, weil zu $x = -k$ kein Punkt der Curve existirt, mag k klein oder groß gedacht werden.

§. 45.

Bestimmung tangentirender Ebenen an Flächen.

Ist irgend eine Fläche durch die Gleichung $F_{x,y,z} = 0$ gegeben, und soll für den, den Coordinaten a, b, c entsprechenden Punkt P derselben, eine tangentirende Ebene gelegt, also die Parameter A, B, derjenigen durch diesen Punkt gehenden Ebene, deren Gleichung nach §. 39. 3.

$$z - c + A(y - b) + B(x - a) = 0$$

ist, bestimmt werden, welche sich in P am innigsten an die Fläche anschließt, so entsteht als Differenz der benachbarten Coordinaten, der Fläche und Ebene, wenn blos x = a sich um k ändert,

$$[\partial z_x + B]\, k + \partial^2 z_x \cdot \frac{k^2}{2} + \ldots.$$

und wenn nur y = b sich um r ändert, r wie k unendlich klein gedacht,

$$[\partial z_y + A]\, r + \partial^2 z_y \cdot \frac{r^2}{2} + \ldots.$$

und beide Differenzen werden kleinstmöglichst wenn $A = -(\partial z_y)_b$ und $B = -(\partial z_x)_a$ ist. Substituirt man diese Werthe, so folgt als Gleichung für die in P tangentirende Ebene

$$z - c - (y - b) \cdot (\partial z_y)_b - (x - a)(\partial z_x)_a = 0.$$

Beispiel. Die Ebene zu bestimmen, welche die Kugelfläche $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ in dem Punkt P berührt, der zu $x = \frac{3}{13} r$ und $y = \frac{4}{13} r$ gehört.

Ihre Gleichung ergiebt sich

$$12z + 4y + 3x - 13r = 0.$$

Anmerkung. Aehnliche Bestimmungen lassen sich für berührende Kugeln an Flächen und berührende Kreise an Curven doppelter Krümmung ausführen.

IV.

Herleitung von allgemeinen Gesetzen zur Bestimmung derjenigen in §. 36. erwähnten Gegenstände, welche die Anwendung der Integral-Rechnung erfordern.

§. 46.

Bestimmung der Längen von einfach und doppelt-gekrümmten Curven.

1. Für ebene Curven.

Ist $C_{x,y} = 0$ die Gleichung, AB der Bogen der Curve (Fig. 2.), dessen Länge s zu bestimmen ist, und entspricht A den Coordinaten $OC = a$; $CA = (y_x)_a$; B denen, $OD = b$; $DB = (y_x)_b$, so ist, wenn für jeden Punkt P zwischen A und B die Länge von AP durch v ausgedrückt wird, das nächst anliegende unendlich kleine Bogen-Element $dv = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, oder nach §. 33. 1. $\partial y_x \cdot dx$ für dy gesetzt, $dv = \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$ und also v = der Summe aller dieser unendlich vielen und unendlich kleinen Producten, als Repräsentanten von unendlich kleinen in stetiger Folge aneinander hängender Bogen-Elemente, welche alle durch $\sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$ ausgedrückt sind, wenn allmählig a, dann $a + dx$, $a + 2dx$ u. s. w. bis zuletzt $x - dx$ für x gesetzt wird. Es ist aber diese durch $\Sigma\,[\sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx]$ auszudrückende Summe nach §. 33. 2. $= \int_{x \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$

und folglich:

$$s = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx\,.$$

Setzt man für jeden Punkt P der Curve, O als Pol gewählt, den Radiusvector $OP = r$; den Polarwinkel $POX = \varphi$ und für den Anfangspunkt A diesen Winkel $AOX = \alpha$, für den Endpunkt B, den $BOX = \beta$; so daß $x = r\,\mathrm{Cos}\,\varphi$; $y = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi$

ist (§. 34. 1.) und substituirt diese Werthe, indem zugleich $\partial y_\varphi \cdot \partial \varphi_x$ für ∂y_x geschrieben wird, so entsteht (nach §. 27. 3te Methode) die allgemeine Rectifikations-Formel für Polar-Coordinaten

$$s = \int_{\beta \div \alpha} \sqrt{r^2 + \partial r_\varphi^2} \cdot d\varphi.$$

2. Für doppelt gekrümmte Curven.

Sind die, die Form einer Curve doppelter Krümmung bestimmenden beiden Gleichungen: $F_{x,y,z} = 0$ und $f_{x,y,z} = 0$ gegeben, und bezeichnet s die zu bestimmende Bogenlänge zwischen den Gränzen $x = a$ und $x = b$, so erscheint für jeden Bogen v der unendlich kleine Zuwachs dv als Diagonale eines Parallelepipedums von den Abmessungen dx, dy und dz, und es ist also $dv = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx$, woraus, ganz wie in 1, die Rectifications-Formel:

$$s = \int_{b \div a} \sqrt{1 + \partial y_x^2 + \partial z_x^2} \cdot dx \text{ folgt.}$$

Bei Anwendung dieser Formel ist, nachdem aus beiden Gleichungen $F = 0$ und $f = 0$, z eliminirt worden, ∂y_x; und wenn y eliminirt ist, ∂z_x zu entnehmen, und substituirt man dann beide, als Functionen von x sich ergebenden Werthe, so ist dann die Integration nach x auszuführen.

Beispiele.

1. Ist $y = \sqrt{2rx - x^2} + r \operatorname{Arc Cos} \frac{r - x}{r}$ gegeben, so folgt zwischen den Grenzen von $x = \frac{1}{2} r$ bis $x = 2r$; $s = 2r$.

2. Für $r = a\varphi$ entsteht zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$;

$$s = \frac{a}{2} \left[\pi \sqrt{1 + \pi^2} + \ln[\pi + \sqrt{1 + \pi^2}] \right].$$

3. Welche Länge s hat die Durchschnittslinie der beiden Ebenen $3z + 5y + 2x - 30 = 0$ und $2z + 4y + 3x = 24$ von $x = 0$ bis $x = 4$?

Es folgt $s = 2 \cdot \sqrt{78}$.

4. Welche Länge s hat die Durchschnitts-Curve eines Kegelmantels und der Fläche einer Halbkugel, wenn beide die gemeinschaftliche Kreisebene zum Halbmesser a zur Grundebene haben, der normale Kegel aber 2a zur Höhe hat, von $x = 0$ bis $x = a$?

Die Gleichung ist, wenn der Mittelpunkt der Grundebene $a^2\pi$ als Anfangspunkt O der Coordinaten, und 2a als die Coordinaten-Achse Z gewählt wird, für den Kegelmantel: $z^2 - 4y^2 - 4x^2 - 4az + 4a^2 = 0$; für die Oberfläche der Halbkugel: $z^2 + y^2 + x^2 - a^2 = 0$, und es entsteht sowohl $s = \frac{a\pi}{2}$; als auch

$$s = \frac{3}{5} a \operatorname{Arc} \operatorname{Sin} \frac{5}{3},$$

also imaginär. Der Ausdruck $\frac{a\pi}{2}$ giebt die Länge des Quadranten der gemeinschaftlichen Grundebene $a^2\pi$; der zweite Bogen existirt nicht bis zur Grenze $x = a$, [indem zu $x = a$ nur allein $y = 0$ und $z = 0$; zu $x = 0$ aber, sowohl $y = a$ und $z = 0$, als auch: $y = \frac{3}{5}a$ und $z = \frac{4}{5}a$ paßt], sondern für diesen Durchschnitt ist $\frac{3}{5}a$ der größte Werth von x.

§. 47.

Quadraturen von Ebenen und Flächen.

1. Von Ebenen.

Der Inhalt E jeder Ebene, begränzt von einem Bogen AB (Fig. 2), einer Curve zur Gleichung $y = y_x$, den Ordi-

naten $(y_x)_a = AC$ und $(y_x)_b = BD$ zu den Endpunkten dieses Bogens, und dem Theil $b - a = CD$ der Achse X, ist, wenn x alle Werthe von x, von $x = a$ bis $x = b - dx$ ausdrückt, $= \Sigma[y \cdot dx]$, oder, nach §. 33. 2.

$$E = \int_{b \div a} y\,dx\,.$$

Soll der Inhalt E eines Ausschnittes wie AOB, begränzt von dem Bogen AB und zwei Radien-Vectoren AO und BO, allgemein ausgedrückt werden, so führt eine Polar-Gleichung am leichtesten zum Ziel. Bezeichnet nämlich für jeden Punkt P, r den Radius-Vector OP, φ den Polar-Winkel POX, α den AOX; β den BOX, so wird, wenn φ um $d\varphi$ wächst, der Ausschnitt BOP um $\frac{r}{2} \cdot r\,d\varphi$ wachsen, und es ist also

$$E = \Sigma\left(\frac{r^2}{2} \cdot d\varphi\right)$$

von $\varphi = \beta$ bis $\varphi = \alpha - d\varphi$; d. h.

$$E = \frac{1}{2}\int_{\alpha \div \beta} r^2\,d\varphi\,.$$

2. Von Flächen.

Ist $Q_{x,y,z} = 0$ die gegebene Gleichung der Fläche, und soll der Inhalt F des Raumes derselben zwischen den Grenzen x'', x' und y'' y', d. h. der Theil F dieser Fläche allgemein ausgedrückt werden, dessen Projection auf die Coordinaten-Ebene XY das Rechteck von den Abmessungen $x'' - x'$ und $y'' - y'$ ist, so hat man, wenn x jeden Werth von x zwischen den Grenzen x'', x' und y jeden Werth von y zwischen y'' und y'; φ aber den Winkel ausdrückt, welchen das Flächen-Element dF, mit seiner Projection $dx \cdot dy$ auf XY, bildet,

$$dF \cdot \mathrm{Cos}\,\varphi = dx \cdot dy\,.$$

Denkt man sich nun durch den Endpunkt A (Fig. 3.), der zu x und y gehörigen Ordinate z, eine Ebene parallel mit

der XY und schneidet die Verbreitung der, als Ebene anzusehenden unendlich kleinen, Fläche dF diese Ebene in einer Geraden L, welche mit dx den Winkel δ, also mit dy den $\frac{1}{2}\pi - \delta$ bildet, so ist $dx \operatorname{Sin}\delta \operatorname{tg}\varphi$ = dem Zuwachs dz von z in Beziehung auf die Aenderung dx von x, d. h. $dx \operatorname{Sin}\delta \operatorname{tg}\varphi = \partial z_x dx$ und $dy \operatorname{Cos}\delta \operatorname{tg}\varphi$ = dem Zuwachs dz von z in Beziehung auf die Aenderung dy von y, also

$$dy \operatorname{Cos}\delta \operatorname{tg}\varphi = \partial z_y dy\,,$$

und aus beiden Gleichungen folgt, wenn man δ eliminirt,

$$\operatorname{Cos}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}}\,.$$

Wird nun dieser Werth in $dF \cdot \operatorname{Cos}\varphi = dx\,dy$ substituirt, so folgt

$$dF = dx \cdot dy \cdot \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}\,,$$

und also ist der unendlich schmale, nur dx breite Streifen, als Theil von F, dessen Projection auf XY das Rechteck vom Inhalt $dx \cdot (y'' - y')$ ist

$$= dx \cdot \Sigma\left[\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dy\right]$$

$$= \left[\int_{y'' \div y'} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dy\right] \cdot dx\,; \text{ folglich}$$

$$F = \Sigma\left[\left[\int_{y'' \div y'} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} \cdot dy\right] dx\right]$$

oder (§. 33. 2.)

$$F = \int_{x'' \div x'} \left[\int_{y'' \div y'} \sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2}\, dy\right] dx\,,$$

welches die allgemeine Quadratur-Formel für Flächen ist.

Ist die Fläche eine Umdrehungsfläche, erzeugt durch Umdrehung des Bogens AB = s (Fig. 2.) um die Achse X, und

sind die Endpunkte von $(y_x)_a$ und $(y_x)_b$ zugleich die Endpunkte von s, so ist jedes Bogen-Element

$$= \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx$$

und die von demselben beschriebene unendlich schmale Zone

$$= 2\pi y \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx, \text{ also}$$

$$F = 2\pi \left[\Sigma y \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx \right]$$

von $x = a$ bis $x = b - dx$; oder

$$F = 2\pi \cdot \int_{b \div a} y \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx \, .$$

Beispiele.

1. Es sei $y \cdot (5 - x)^2 = 4x^3$; und $E_{3 \div 0}$ wird gesucht. Man erhält $42 - 40 \ln 2, 5 = 5, 35 \ldots$.

   Sollte $E_{6 \div 0}$ bestimmt werden, so würde sich ein nicht existirendes Resultat ergeben müssen, weil zwischen $x = 0$ und $x = 6$, nämlich für $x = 5$, kein Werth für y existirt (§. 33. 2.).

2. Zu $r = a\varphi$ wird $E_{\pi \div 0} = \frac{1}{6} a^2 \pi^3$.

3. Die Oberfläche einer Halbkugel zum Halbmesser r zu bestimmen.

   Wählt man O in der Kugelfläche, OX durch den Mittelpunkt der Kugel gehend, so daß (§. 40.) $a = r$; $b = 0$; $c = 0$ ist, so ist die Gleichung $z^2 + y^2 + x^2 - 2rx = 0$, und aus ihr

$$\partial z_x = \frac{r - x}{z}; \ \partial z_y = -\frac{y}{z}; \text{ also}$$

$$\sqrt{1 + \partial z_x^2 + \partial z_y^2} = \frac{r}{\sqrt{2rx - x^2 - y^2}}$$

   und, wenn dieser Ausdruck durch A bezeichnet wird,

$$\int A \, dy = r \operatorname{Arc\,Sin} \frac{y}{\sqrt{2rx - x^2}} \, ;$$

also zwischen den hier festgesetzten Grenzen

$$y'' = +\sqrt{2rx - x^2} \text{ und } y' = -\sqrt{2rx - x^2}$$

$$\int_{y'' \div y} A\,dy = r\pi; \text{ dann}$$

$$\int r\pi\,dx = r\pi x;$$

folglich, zwischen den durch die Aufgabe festgesetzten Grenzen,

$$x'' = 2r \text{ und } x' = 0;$$

$$F = 2r^2\pi.$$

Wählt man O im Mittelpunkt der Kugel, so ist die Gleichung $z^2 + y^2 + x^2 - r^2 = 0$ zum Grunde zu legen. Am einfachsten erreicht sich das Ziel durch Anwendung der Formel für die Umdrehungsflächen.

§. 48.

Cubaturen von Körpern.

Bezeichnet K den Inhalt eines körperlichen Raumes, begränzt von der, der Gleichung $F_{x,y,z} = 0$ entsprechenden Fläche, entweder ganz von ihr, oder auch theilweise von Ebenen, die mit den Coordinaten-Ebenen zusammenfallen oder parallel liegen, und man denkt sich innerhalb der für x und y festgesetzten Grenzen x' bis x'' und y' bis y'', das unendlich kleine Rechteck vom Inhalt $dx \cdot dy$, und versteht unter z' bis z'' die Grenzwerthe von z für den gedachten Körper an dieser Stelle, so daß beide Functionen von x, y sind, oder auch constant sein können, so ist $[z'' - z']\,dx\,dy$ der Inhalt des über $dx \cdot dy$ befindlichen, mit Z parallelen Elementar-Theilchens des Körpers, folglich $dx \cdot \Sigma[(z'' - z')\,dy]$ oder $dx \cdot \int_{y'' \div y'} (z'' - z')\,dy$ die Summe aller dieser Elementar-Stäbchen, oder der Inhalt der Schicht von der Dicke dx, welche parallel mit der Ebene YZ, in der Entfernung x von ihr, als ein abgesonderter Theil

von K zu betrachten ist, und die Summe aller dieser Schichten, also

$$\Sigma\left[\left(\int_{y''\div y'}(z''-z')\,dy\right)\cdot dx\right]$$

zwischen den gegebenen Grenzen von x giebt daher K, so daß also

$$K=\int_{x''\div x'}\left(\int_{y''\div y'}(z''-z')\,dy\right)dx \text{ ist.}$$

Ist, wie z. B. bei Umdrehungskörpern, der Inhalt jeder, auf eine der Achsen, etwa auf X normalen Durchschnittsebene unmittelbar als Function von x auszudrücken, ist derselbe $=F_x$, so hat man dann sogleich

$$K=\int_{x''\div x'}F_x\,dx\ .$$

Beispiel.

Den Inhalt des Körpers zu bestimmen, der begränzt ist von der Fläche $az+y^2+x^2-r^2=0$ und ihren drei Grundschnitten?

Es ergiebt sich der verlangte Inhalt nach jeder der beiden Formeln $=\dfrac{r^4\pi}{8a}$.

V.

Anwendungen der allgemeinen Gesetze auf ebene algebraische Curven vom zweiten Grade, d. h. auf Kegelschnitte.

§. 49.

Entstehung der Kegelschnitte.

Die ebenen algebraischen Curven zweiten Grades, deren allgemeine Form also

$$Ay^2+Byx+Cx^2+Dy+Ex+F=0$$

ist, werden deshalb **Kegelschnitte** genannt, weil die Durchschnitts-Curve jedes unbegränzten Kegelmantels mit einer beliebig, nur nicht durch die Spitze des Kegels, gelegten, den Kegel schneidenden Ebene, in Beziehung auf jede zwei in dieser Ebene gewählte Coordinaten-Achsen X, Y, allemal vom zweiten Grade ist, also obige allgemeine Form hat. Wird nämlich in einer der Seiten S eines unbegränzten gemeinen (normal gedachten) Kegels (Fig. 4.), in der beliebigen Entfernung h von der Spitze desselben, ein Punkt D gewählt, durch S ein Achsendurchschnitt M gelegt und in der Ebene desselben in beliebiger Richtung aus D eine gerade Linie L gezogen, welche mit der, S gegenüber liegenden, Seite S′ des Kegels convergiren, divergiren, auch parallel sein kann, und dann durch L eine Ebene E normal auf M gedacht, so schneidet E den Kegelmantel in einer ebenen Curve, für welche L die Achse und D der Scheitelpunkt ist.

Bezeichnet nun α den Winkel der Achse des Kegels mit jeder seiner Seiten, β den Winkel, welchen L mit S einschließt, u jede Abscisse auf L von D ab, und z jede der beiden zu U gehörigen gleichen Ordinaten des Kegelschnitts oder der Durchschnitts-Curve, so ist z zugleich Ordinate auf den Durchmesser der durch den Endpunkt von u normal auf die Achse des Kegels gelegten Kreisebene, und die zugehörigen beiden Abscissen dieses Durchmessers ergeben sich leicht, die eine $= \frac{u \operatorname{Sin} \beta}{\operatorname{Cos} \alpha}$; die andere $= 2h \operatorname{Sin} \alpha + \frac{u \operatorname{Sin}(2\alpha - \beta)}{\operatorname{Cos} \alpha}$; und da, nach den Eigenschaften des Kreises, ihr Product gleich z^2 ist, so hat man also als Relation zwischen den Abscissen u auf der Achse vom Scheitelpunkt ab, und den zugehörigen normalen Ordinaten z jedes Kegelschnittes, die Gleichung:

$$z^2 = 2h \operatorname{tg} \alpha \operatorname{Sin} \beta \cdot u + \frac{\operatorname{Sin} \beta \operatorname{Sin}(2\alpha - \beta)}{\operatorname{Cos}^2 \alpha} \cdot u^2$$

oder: den constanten Coefficienten oder Parameter $2h \operatorname{tg}\alpha \operatorname{Sin}\beta$ durch P und den $\frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(2\alpha-\beta)}{\operatorname{Cos}^2\alpha}$ durch Q ausgedrückt,

$$z^2 = Pu + Q \cdot u^2 .$$

Werden nun in der Ebene E willkührlich die Coordinaten-Achsen X, Y gewählt, und bezeichnen a, b die Coordinaten des neuen Anfangspunktes O (Fig. 5.), δ aber den Winkel der Achse U mit der neuen Coordinaten-Achse X, so ist (wie im §. 35.)

$$u = a + x \operatorname{Cos}\delta - y \operatorname{Sin}\delta ,$$
$$z = b + x \operatorname{Sin}\delta + y \operatorname{Cos}\delta ,$$

und substituirt man diese Werthe in die vorige Gleichung, so entsteht eine Gleichung von der Form

$$Ay^2 + Byx + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0 ,$$

worinnen:

$$A = \operatorname{Cos}^2\delta - Q \operatorname{Sin}^2\delta ;$$
$$B = 2(1 + Q) \operatorname{Sin}\delta \operatorname{Cos}\delta ;$$
$$C = \operatorname{Sin}^2\delta - Q \operatorname{Cos}^2\delta ;$$
$$D = 2b \operatorname{Cos}\delta + P \operatorname{Sin}\delta + 2aQ \operatorname{Sin}\delta ;$$
$$E = 2b \operatorname{Sin}\delta - P \operatorname{Cos}\delta - 2aQ \operatorname{Cos}\delta ;$$
$$F = b^2 - Pa - Qa^2$$

ist, so daß also jeder Kegelschnitt eine algebraische Curve zweiten Grades, und umgekehrt, jede Gleichung zweiten Grades zwischen x und y, wenn ihr zusammengehörige reelle Werthe von x und y entsprechen, einen Kegelschnitt darstellt.

§. 50.

Beurtheilung der Form eines Kegelschnittes aus der allgemeinen Coordinaten-Gleichung desselben.

Die Coordinaten-Gleichung $z^2 = Pu + Qu^2$, wenn die Abscissen u auf der Achse des Kegelschnittes vom Scheitelpunkt ab genommen werden, liefert:

1. Für $\beta = 2\alpha$;

$z^2 = Pu$, welche Curve **Parabel** heißt, und zwei gleichgeformte unendliche Schenkel hat.

2. Für $\beta > 2\alpha$;
$z^2 = Pu - Qu^2$, welche Curve **Ellipse** heißt und keinen unendlichen Schenkel hat, sondern eine geschlossene Curve ist. In dem besondern Fall, wenn $\beta = \frac{\pi}{2} + \alpha$ ist, wird $Q = 1$, also $z^2 = Pu - u^2$, die Gleichung für den Kreis zum Durchmesser P, wonach der Kreis mit unter die Ellipsen zu zählen ist.

3. Für $\beta < 2\alpha$;
$z^2 = Pu + Qu^2$, welche Curve **Hyperbel** heißt und vier unendliche gleiche Schenkel hat, indem zu negativen Werthen von u, größer als $\frac{P}{Q}$, auch Ordinaten (im Scheitelkegel liegend) gehören.

Es entsteht aber aus der allgemeinen Coordinaten-Gleichung nach §. 49.

ad 1, also für die Parabel,

$A = \text{Cos}^2\delta$; $B = 2\,\text{Sin}\,\delta\,\text{Cos}\,\delta$; $C = \text{Sin}^2\delta$,

woraus $4AC - B^2 = 0$ folgt;

ad 2, für die Ellipse,

$A = \text{Cos}^2\delta + Q\,\text{Sin}^2\delta$;
$B = 2(1 - Q)\,\text{Sin}\,\delta\,\text{Cos}\,\delta$;
$C = \text{Sin}^2\delta + Q\,\text{Cos}^2\delta$,

woraus $4AC - B^2 > 0$ hervorgeht;

ad 3, für die Hyperbel,

$A = \text{Cos}^2\delta - Q\,\text{Sin}^2\delta$;
$B = 2(1 + Q)\,\text{Sin}\,\delta\,\text{Cos}\,\delta$;
$C = \text{Sin}^2\delta - Q\,\text{Cos}^2\delta$,

woraus sich $4AC - B^2 < 0$, d. h. negativ ergiebt, und hieraus erhellet, welcher der Kegelschnitte einer gegebenen

allgemeinen Coordinaten-Gleichung vom zweiten Grade entspricht. Ist $4AC - B^2 > 0$, also die Curve eine Ellipse, aber außerdem zugleich noch $A = C$ und $B = 0$, so ist diese Ellipse ein Kreis (§. 38.).

Beispiele.

1. Was stellt $y^2 + ax - b = 0$ für einen Kegelschnitt dar? eine Parabel.
2. Was die Gleichung $xy - a^2 = 0$? eine Hyperbel.
3. Was die Gleichung $y^2 \pm 2xy + 3x^2 = 20$? eine Ellipse.

§. 51.

Von der Parabel insbesondere.

Ist zwischen Abscissen x auf der Achse der Parabel, ihren Scheitelpunkt als Anfangspunkt gewählt, und rechtwinklichen Ordinaten y die Gleichung $y^2 = px$ entweder unmittelbar gegeben oder aus der allgemeinen Coordinaten-Gleichung nach §. 41. p (der Achsenparameter) bestimmt, so erhält man leicht folgende Resultate.

1. Wenn α den Winkel bezeichnet, welchen die Tangente im Endpunkt von y mit der Achse bildet, so ist

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p}{2y}; \text{ dann Subt.} = 2x; \text{ Subn.} = \frac{p}{2}$$

ferner, weil $\partial^2 y_x = -\frac{p^2}{4y^3}$ ist, die Krümmung durchaus concav gegen X; dann

$$A = 3x + \frac{1}{2}p; \quad B = -\frac{4x^2}{y};$$

$$R^2 = \frac{1}{4p}(4x + p)^3. \quad (\text{§. } 42, 43, 44.).$$

2. Bezeichnet B den Endpunkt der Abscisse $x = \frac{1}{4}p$; P einen beliebigen Punkt in der parabolischen Linie, so ist die

Gerade BP $= x + \frac{1}{4}p$, und zieht man aus P eine Parallele PS mit der Achse, so bilden PS und PB gleiche Winkel mit der Tangente in P, weshalb PB Brennstrahl, B Brennpunkt genannt wird.

3. Jede Parallele mit der Achse einer Parabel, wie etwa PS, halbirt alle mit der Tangente in P parallele Sehnen, und heißt ein Durchmesser der Parabel. Wird nämlich PS als Abscissen-Achse gewählt, P als Anfangspunkt, und bezeichnet u jede Abscisse, w aber die entsprechende halbe Sehne als Ordinate unter dem Winkel α (siehe 1.), so ergiebt sich aus den Gleichungen $y = px$; $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{p}{2y}$ und

$$[w\,\mathrm{Sin}\,\alpha + y]^2 = [x + u + w\,\mathrm{Cos}\,\alpha]$$

die Gleichung $w^2 = \frac{p}{\mathrm{Sin}^2\alpha} \cdot u$, woraus die Wahrheit erhellet.

4. Bezeichnet D den Scheitelpunkt einer Parabel, P einen beliebigen Punkt dieser Curve, x und y die Coordinaten desselben, G den Fußpunkt von y, so findet sich nach den allgemeinen Formeln in 46, 47. u. s. w.

die Länge DP $= \frac{y\sqrt{p^2 + 4y^2}}{2p} + \frac{p}{4} \cdot \ln \frac{2y + \sqrt{p^2 + 4y^2}}{p}$,

die Ebene DGP $= \frac{2}{3}xy$;

dann, B als Brennpunkt gedacht und unter φ den Winkel DBP verstanden,

$$\text{die Ebene DBP} = \frac{p^2}{48} \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2} \cdot \left[3 + \mathrm{tg}^2\,\frac{\varphi}{2}\right]$$

und die Ebene, begränzt von u, w und den zugehörigen Bogen $= \frac{2}{3} uw\,\mathrm{Sin}\,\alpha$; ferner die Fläche der Calotte,

welche DP bei der Umdrehung um x beschreibt

$$= \frac{\pi}{6p}\left[(p^2 + 4px)^{\frac{3}{2}} - p^3\right]$$

und der Inhalt des bei dieser Umdrehung von der Ebene $\frac{2}{3}xy$ beschriebenen paraboloidischen Abschnitts

$$= \frac{1}{2}\pi y^2 x = \frac{1}{2}\pi p x^2.$$

§. 52.

Von der Ellipse insbesondere.

Bezeichnet x jede Abscisse, vom Scheitelpunkt als Anfangspunkt, auf der Achse genommen, und y die zugehörigen Ordinaten, so ist entweder unmittelbar gegeben, oder aus der allgemeinen Coordinaten-Gleichung nach §. 41. gefunden,

$$y^2 = Px - Qx^2,$$

und da aus dieser Gleichung folgt, daß $y = 0$ wird, nicht nur für $x = 0$ sondern auch für $x = \frac{P}{Q}$ so ist $\frac{P}{Q}$ die Entfernung der gegenüberliegenden Scheitelpunkte, also die Länge der Achse, und soll durch $2 \cdot a$ bezeichnet werden. Es folgt aber aus der Gleichung $y^2 = Px - Qx^2$ auch, daß y ein Maximum wird, für $x = a$, und daß die Größe dieses Maximums $= \sqrt{\frac{P^2}{4Q}}$ ist; wird dieser Ausdruck durch b bezeichnet, so folgt dann aus den beiden Gleichungen $\frac{P}{2Q} = a$ und $\sqrt{\frac{P^2}{4Q}} = b$; weil Q nicht Null sein kann, $P = \frac{2b^2}{a}$; $Q = \frac{b^2}{a^2}$ und substituirt man beide Werthe in $y^2 = Px - Qx^2$, so nimmt sie die Gestalt

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(2ax - x^2)$$

an. Wird dann der Durchschnittspunkt M (Fig. 6.) von 2a und 2b als Anfangspunkt der Coordinaten u, y gewählt, u auf a beiderseits M abgetragen gedacht, so daß $x = a \pm u$ wird, so entsteht die noch einfachere Gleichung

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - u^2) \text{ oder}$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{u^2}{a^2} = 1$$

aus welcher auch erhellet, daß 2a und 2b die Ellipse in vier congruente Quadranten theilen. Es sind daher 2a und 2b, beide Achsen der Ellipse und M ihr Mittelpunkt.

Es ergeben sich nun, am einfachsten aus der letzten Coordinaten-Gleichung, folgende Formeln und Gesetze für jede Ellipse:

1. Ist F ein beliebiger Punkt der elliptischen Curve (Fig. 6.) und für diesen Punkt FG die Tangente, FK die Normale, und α der Winkel von FG gegen die Achse BA $= 2a$; so folgt aus den allgemeinen Formeln in §. 42 u. s. w.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2 u}{a^2 y}; \text{ Subt.} = \frac{a^2 y^2}{b^2 u}; \text{ Subn.} = \frac{b^2 u}{a^2};$$

$$A = \frac{a^2 - b^2}{a^4} u^3; \; B = \frac{b^2 - a^2}{b^4} y^3;$$

$$R^2 = \frac{[a^4 y^2 + b^4 u^2]^3}{(ab)^8}.$$

2. Ist $AB = 2a$ größer als $CD = 2b$ und man trägt von M aus auf AB die gleichen Längen MH, MJ ab, jede $= \sqrt{a^2 - b^2}$ und bezeichnet diesen Ausdruck durch e, so wird $HF = a - \frac{e}{a}u$; $JF = a + \frac{e}{a}u$, also $HF + FJ = 2a$ und weil die Normale FK den Abstand HJ in zwei Stücke $e - \frac{e^2}{a^2}u$ und $e + \frac{e^2}{a^2}u$ theilt, die sich wie HF und FJ verhalten, so halbirt FK den Winkel HFJ, und wegen dieser Eigenschaft heißen H, J die Brenn-

punkte der Ellipse und HF, FJ zusammengehörige Brennstrahlen.

3. Bezeichnet β den Winkel FMB, so daß also $tg\beta = \frac{y}{u}$ ist, so folgt hieraus und aus $tg\alpha = \frac{b^2 u}{a^2 y}$; $tg\alpha \cdot tg\beta = \frac{b^2}{a^2}$ oder

$a^2 Sin\alpha\, Sin\beta - b^2 Cos\alpha\, Cos\beta = 0$ woraus auch

$$Sin^2\beta = \frac{b^4 Cos^2\alpha}{a^4 Sin^2\alpha + b^4 Cos^2\alpha};\ Cos^2\beta = \frac{a^4 Sin^2\alpha}{a^4 Sin^2\alpha + b^4 Cos^2\alpha}$$

und aus diesen Formeln dann auch noch

$$Sin^2(\alpha + \beta) = \frac{[a^2 Sin^2\alpha + b^2 Cos^2\alpha]^2}{a^4 Sin^2\alpha + b^4 Cos^2\alpha}$$ folgt.

4. Wird durch den beliebigen Punkt L in dem, dem beliebigen Punkt F zugehörigen Radius-Vector MF eine Sehne NQ parallel mit der Tangente FG in F gelegt, so ist L ihr Mittelpunkt, denn: es ist, wenn ML durch u' und einmal LQ, das anderemal LN durch y' ausgedrückt wird, im ersten Fall

$$\frac{[y' Sin\alpha + u' Sin\beta]^2}{b^2} + \frac{[y' Cos\alpha - u' Cos\beta]^2}{a^2} = 1;$$

im zweiten aber

$$\frac{[u' Sin\beta - y' Sin\alpha]^2}{b^2} + \frac{[y' Cos\alpha + u' Cos\beta]^2}{a^2} = 1$$

und aus der einen wie aus der andern Gleichung folgt:

$$y'^2 + \frac{a^2 b^2}{a^4 Sin^2\alpha + b^4 Cos^2\alpha} \cdot u'^2 - \frac{a^2 b^2}{a^2 Sin^2\alpha + b^2 Cos^2\alpha} = 0$$

woraus auch für $u' = 0$;

$$SM^2 = MT^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 Sin^2\alpha + b^2 Cos^2\alpha};$$ und für $y' = 0$;

$$FM^2 = MZ^2 = \frac{a^4 Sin^2\alpha + b^4 Cos^2\alpha}{a^2 Sin^2\alpha + b^2 Cos^2\alpha}$$ folgt.

Wird dann MF = MZ durch a' und MS = MT durch b' ausgedrückt, so geht die Gleichung zwischen u' und y' über, in

$$\left(\frac{y'}{b'}\right)^2 + \left(\frac{u'}{a'}\right)^2 = 1.$$

Da nun hiernach jede durch den Mittelpunkt M der Ellipse gelegte Sehne, alle Sehnen, welche parallel mit den Tangenten an den Endpunkten der ersteren liegen, halbirt, so wird jede durch den Mittelpunkt M geführte Sehne ein Durchmesser der Ellipse genannt, und zwar heißen zusammengehörige wie FZ und ST coordinirte Durchmesser.

5. Aus den Formeln für a' und b' in 4. folgt sogleich $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$, d. h. die Summe der Quadrate coordinirter Halbmesser (also auch Durchmesser) ist constant, und eben so leicht entsteht, mit Anwendung der letzten Formel in 3.,

$$a'b'\operatorname{Sin}(\alpha + \beta) = ab,$$

d. h. das Product coordinirter Halbmesser in den Sinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ist constant.

6. Die Länge s des elliptischen Bogens CF den Coordinaten u, y, parallel mit den Achsen, zugehörig ist

$$= \int_{u \div 0} \sqrt{1 + \partial y_u^2} \cdot du \text{ oder}$$

$$s = \frac{1}{a} \int_{u \div 0} \sqrt{\frac{a^4 - e^2 u^2}{a^2 - u^2}} du\ ,$$

oder auch $u = a \operatorname{Sin} \varphi$ gesetzt,

$$s = \frac{1}{a} \cdot \int_{\varphi \div 0} \sqrt{a^2 - e^2 \operatorname{Sin}^2 \varphi}\, d\varphi\ ,$$

allein dieß Integral ist nur annähernd durch unendliche Reihen zu ermitteln; ein endlicher Ausdruck dafür ist noch nicht gefunden, und man nennt alle Integrale,

welche auf diese Form zu reduciren sind, elliptische Transcendenten.

7. Der Inhalt der Ebene, begränzt von b, s, y und u, ergiebt sich

$$= \frac{b}{2a}\left[u\sqrt{a^2 - u^2} + a^2 \operatorname{ArcSin}\frac{u}{a}\right],$$

woraus für den elliptischen Quadranten $\frac{ab\pi}{4}$, also für die ganze elliptische Ebene $ab\pi$ folgt, so daß dieselbe die mittlere geometrische Proportional-Ebene zwischen den Kreisebenen zu den Halbmessern a und b ist.

8. Dreht sich der Bogen CF = s in bleibender Entfernung um u oder MB, so ergiebt sich der Inhalt der entstehenden Zone

$$= \frac{\pi b}{a^2}\left[u\sqrt{a^4 - e^2u^2} + \frac{a^4}{e} \operatorname{ArcSin}\frac{eu}{a^2}\right].$$

Dreht sich aber der Bogen BF um MC, so entsteht für die Zone der Ausdruck

$$\frac{\pi a}{b^2}\left[y\cdot\sqrt{b^4 + e^2y^2} + \frac{b^4}{e}\ln\frac{ey + \sqrt{b^4 + e^2y^2}}{b^2}\right].$$

Hieraus folgt für die gesammte Oberfläche des Ellipsoids bei der Umdrehung um AB die Formel

$$2\pi b\left[b + \frac{a^2}{e}\operatorname{ArcSin}\frac{e}{a}\right]$$

und für die, wenn die Umdrehung um CD erfolgt ist,

$$2\pi a\left[a + \frac{b^2}{e}\ln\frac{e+a}{b}\right].$$

9. Dreht sich die Ebene, begränzt vom Bogen CF und den Ordinaten seiner Endpunkte auf MB, um MB, so ist der Inhalt der entstehenden körperlichen Zone $= \frac{\pi b^2}{3a^2}[3a^2 - u^2]\cdot u$; dreht sich aber die Ebene, be-

gränzt vom Bogen BF und den Ordinaten seiner Endpunkte auf MC um MC, so wird der körperliche Raum

$$= \frac{\pi a^2}{3 b^2} [3b^2 - y^2] y.$$

Aus beiden Formeln folgt für den gesammten körperlichen Inhalt des Ellipsoids, bei der Umdrehung um AB die Formel $\frac{4}{3}\pi ab^2$ und bei der Umdrehung um CD die $\frac{4}{3}\pi a^2 b$.

Anmerkung. Bei den beiden hier ihrem Inhalt nach bestimmten Umdrehungskörpern sind bei ersteren alle auf AB, bei letzteren alle auf CD normale Querschnitte, Kreisebenen. Man versteht aber unter Ellipsoid allgemeiner einen Körper, bei welchen alle solche Querschnitte ebenfalls Ellipsen sind, und so ein Ellipsoid ist kein Umdrehungskörper. Bezeichnen a, b, c seine drei halben Achsen, so ergiebt sich der körperliche Inhalt leicht $= \frac{4}{3}\pi abc$.

§. 53.

Von der Hyperbel insbesondere.

Verlängert man die Achse L (Fig. 4.) der Hyperbel jenseits des Scheitelpunkts D bis sie die rückwärts verlängerte Seite S′ in D′ schneidet, und bezeichnet DD′ durch 2a, so hat man, bei der Bedeutung von h in §. 49,

$$h \operatorname{Sin} 2\alpha = 2a \operatorname{Sin}(2\alpha - \beta),$$

und wird hieraus der Werth für $\operatorname{Sin}(2\alpha - \beta)$ in die Gleichung der Hyperbel (§. 49, x für u und y für z gesetzt)

$$y^2 = 2h \operatorname{tg}\alpha \operatorname{Sin}\beta \cdot x + \frac{\operatorname{Sin}\beta \operatorname{Sin}(2\alpha - \beta)}{\operatorname{Cos}^2\alpha} \cdot x^2$$

substituirt, so nimmt sie die einfachere Gestalt

$$y^2 = \frac{h \operatorname{tg}\alpha \operatorname{Sin}\beta}{a} [2ax + x^2]$$

an, welche in noch bequemerer Form erscheint, wenn man un-

ter b die mittlere geometrische Proportionale zwischen $h \operatorname{tg}\alpha \operatorname{Sin}\beta$ und a versteht, wodurch diese Gleichung in

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}[2ax + x^2] \text{ übergeht.}$$

Wählt man die Mitte von DD′, also den Punkt M, Fig. 7, als Anfangspunkt der Coordinaten, und bezeichnet jede Abscisse auf der Achse durch u, die entsprechende Ordinate durch y, so wird die Gleichung folgende:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2}(u^2 - a^2) \text{ oder}$$

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{u^2}{a^2} = -1,$$

woraus hervorgeht, daß, weil für y dasselbe Resultat entsteht, man mag dasselbe u positiv oder negativ annehmen, jede Hyperbel aus zwei abgesonderten congruenten Theilen besteht.

Man nennt M den **Mittelpunkt** der Hyperbel, $2a = DD'$ die **Hauptachse** und 2b die **Zwergachse** derselben.

Aus der Vergleichung der Gleichungen für die Hyperbel mit denen der Ellipse fällt in die Augen, daß die Untersuchungen der Eigenschaften der Hyperbel mit denen für die Ellipse viel Uebereinstimmendes ergeben müssen; weshalb hier nur die vorzüglichsten Resultate angegeben werden sollen.

1. Bezeichnet für jeden beliebigen, den Coordinaten u, y zugehörigen Punkt P der Hyperbel, α den Winkel ihrer Tangente mit der Hauptachse, und behalten die übrigen Buchstaben ihre bisherige Bedeutung, so findet man:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b^2 u}{a^2 y}; \text{ Subt.} = \frac{u^2 - a^2}{u}; \text{ Subn.} = \frac{b^2 u}{a^2};$$

$$A = \frac{a^2 + b^2}{a^4} u^3; \; B = -\frac{a^2 + b^2}{b^4} \cdot y^3;$$

$$R^2 = \frac{[a^4 y^2 + b^4 u^2]^3}{(ab)^8};$$

ferner, da für u = unendlich groß, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi$ und

Subt. $= u = \infty$ wird, daß jeder der vier unendlichen congruenten Schenkel der Hyperbel eine Asymptote hat, welche vier Asymptoten, von denen je zweie in eine Richtung fallen, jede mit der Achse einen Winkel φ einschließt, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist. Versteht man dann unter z die Ordinate der Asymptote zur Abscisse u, so folgt auch sogleich $z^2 - y^2 = b^2$ also constant, und $b =$ der Ordinate DE der Asymptote, im Scheitelpunkt D.

2. Trägt man auf der Achse beiderseits des Mittelpunkts M die Länge $MB = MB' = \sqrt{a^2 + b^2} = ME = e$ ab, so ist für jeden Punkt P der Hyperbel den Coordinaten u, y entsprechend $BP = \frac{eu - a^2}{a}$; $B'P = \frac{eu + a^2}{a}$; also $B'P - BP = 2a$ und da die Tangente in P die Linie BB′ in zwei Theile B′J und JB theilt, von welchen der erstere $= \frac{eu + a^2}{u}$; der letztere $= \frac{eu - a^2}{u}$ ist, so folgt daraus: daß diese Tangente den Winkel B′PB halbirt, weshalb B, B′ die **Brennpunkte** und BP, B′P **zusammengehörige Brennstrahlen** genannt werden. Zieht man aus P mit der Asymptote MG die Parallele PC bis zu ihrem Durchschnittspunkt C mit der Asymptote MC, so ist für jeden solchen Punkt P, allemal $MC \cdot CP = \left(\frac{e}{2}\right)^2$, also auch, wenn DF parallel GM ist, $MF \cdot FD = \left(\frac{e}{2}\right)^2$, und es wird $\left(\frac{e}{2}\right)^2$ die **Potenz** der Hyperbel genannt.

3. Bezeichnet β den Winkel PMB, so ist $\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{u}$; also nach 1.

$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta = \frac{b^2}{a^2}$ oder $a^2 \operatorname{Sin}\alpha \operatorname{Sin}\beta = b^2 \operatorname{Cos}\alpha \operatorname{Cos}\beta$,

woraus für $\sin^2\beta$, $\cos^2\beta$ und $\sin^2(\alpha-\beta)$ dieselben Formeln wie §. 52. 2., hervorgehen, wenn nur im Zähler der letzteren — statt + gesetzt wird. Es ergiebt sich ferner aus $MP^2 = u^2 + y^2$;

$$MP^2 = \frac{a^4 \sin^2\alpha + b^4 \cos^2\alpha}{a^2 \sin^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha};$$

dann, wenn die Tangente in P bis zu ihren beiden Durchschnittspunkten R, N mit den Asymptoten verlängert ist, aus den Dreiecken MPR, MPN,

$$PR^2 = PN^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2\alpha - b^2 \cos^2\alpha}$$

und wird dann MP durch a'; $PR = PN$ durch b' ausgedrückt, unter u' jede Abscisse auf MP von M aus, aber größer wie a' gedacht und unter y' jede der beiden gleichen zugehörigen Ordinaten der Hyperbel, parallel mit der Tangente in P, verstanden, so ergiebt sich die Gleichung

$$\left[\frac{y'}{b'}\right]^2 - \left[\frac{u'}{a'}\right]^2 = -1.$$

Endlich folgen auch noch die beiden Gesetze:

$$a'^2 - b'^2 = a^2 - b^2 \text{ und}$$

$$a'b' \sin(\alpha - \beta) = a \cdot b.$$

Es werden a' und b' die **coordinirten Halbmesser** der Hyperbel für den Punkt P genannt.

4. Die Rectification der Hyperbel führt auf elliptische Transcendenten.

Für die Ebene, begränzt von x, y und den zugehörigen Bogen DP entsteht, als Ausdruck für den Inhalt

$$\frac{1}{2}\left(uy - ab \ln \frac{ay + bu}{ab}\right);$$

für die Ebene DFCP aber der

$$\frac{ab}{2} \ln \frac{2 \cdot MC}{e};$$

für die Oberfläche, welche DP bei der Umdrehung um x beschreibt, der

$$\pi b\left[\frac{u\sqrt{e^2u^2-a^4}}{a^2}-b-\frac{a^2}{b}\ln\frac{eu+\sqrt{e^2u^2-a^4}}{a(b+e)}\right];$$

und, für den körperlichen Inhalt des zugehörigen Abschnitts, der

$$\frac{\pi b^2}{2a^2}\cdot[3a+x]x^2.$$

VI.

Betrachtung einiger algebraischen Curven von höheren Graden.

§. 54.

Die Conchoide oder Muschellinie.

Wird einerseits einer Geraden CD (Fig. 8.) ein Punkt A beliebig gewählt, dann durch A unendlich viele, CD durchschneidende Gerade gelegt, und auf jeder, jenseits CD, eine beliebige aber immer dieselbe Länge b abgetragen, so bilden deren Endpunkte die Conchoide. Bezeichnet a die Entfernung AB von A bis CD, so erscheint die Verlängerung BE = b von AB als Achse dieser Curve und E als ihr Scheitelpunkt, und wird jede Abscisse auf dieser Achse, von E aus genommen, durch x, die zugehörige Ordinate durch y ausgedrückt, b — x aber u gesetzt, so folgt aus ähnlichen Dreiecken leicht die Gleichung:

$$y=\frac{a+u}{u}\sqrt{b^2-u^2}$$

oder geordnet:

$$u^4+u^2y^2+2au^3+(a^2-b^2)u^2-2ab^2u-a^2b^2=0$$

und die Conchoide ist demnach eine algebraische Curve vom vierten Grade.

Einfacher erscheint eine Polar-Gleichung, wenn A als Pol gewählt, jeder Polar-Winkel wie EAF durch φ und der zugehörige Radiusvector AF durch r bezeichnet wird, wo sogleich

$$r = a \operatorname{Sec}\varphi + b \text{ entsteht.}$$

Es ergiebt sich nun

1. Zu Bestimmung des Wendungspunkts, aus

$$\partial u_y = -\frac{u^2 \cdot \sqrt{b^2 - u^2}}{ab^2 + u^3}; \text{ und}$$

$$\partial^2 u_y = -\frac{b^2 u^3}{[ab^2 + u^3]^3} \cdot [u^3 + 3au^2 - 2ab^2],$$

die Gleichung $u^3 + 3au^2 - 2ab^2 = 0$

und ihr entsprechend, so lange b^2 nicht kleiner als $2a^2$ ist,

$$u = -a + \sqrt[3]{a} \cdot \left[\sqrt[3]{b^2 - a^2 + b\sqrt{b^2 - 2a^2}} + \sqrt[3]{b^2 - a^2 - b\sqrt{b^2 - 2a^2}}\right];$$

wenn aber $b^2 < 2a^2$ ist,

$$u = a[-1 + 2\operatorname{Cos}\mu]$$

unter μ den Winkel verstanden, für welchen

$$\operatorname{Cos} 3\mu = \frac{b^2 - a^2}{a^2} \text{ wird.}$$

Beispiel. Ist a = b, so folgt für die Coordinaten des Wendungspunkts,

$$u = (\sqrt{3} - 1) \cdot a; \; y = a\sqrt[4]{\frac{27}{4}}.$$

2. Zur Bestimmung des Inhaltes P der Ebene BEFH folgt aus

$$P = \int_{y \div o} u\,dy;$$

$$P = \frac{1}{2}u\sqrt{b^2 - u^2} + \frac{1}{2}b^2 \operatorname{ArcCos}\frac{u}{b} + ab \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - u^2}}{u};$$

und der Inhalt des Ausschnitts EAF =

$$\frac{1}{2}\int_{\varphi \div o} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2 \operatorname{tg}\varphi + \frac{1}{2}b^2\varphi + ab \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right).$$

3. Dreht sich die Ebene EBHF um BH, so entsteht für den Inhalt des Körpers die Formel:

$$\frac{\pi}{3}\left[3ab^2 \operatorname{ArcCos}\frac{u}{b} + (2b^2+u^2)\sqrt{b^2-u^2}\right] \text{ oder}$$

$$\frac{b^2\pi}{3}[3a\varphi + b(2+\operatorname{Cos}^2\varphi)\operatorname{Sin}\varphi].$$

Die Krümmung der Dauben bei Fässern kommt der Conchoide nahe, hat also ein Faß im Lichten die Länge l, ist r der Halbmesser im Bauch, ϱ der im Boden, so erhält man zuerst a aus der Gleichung

$$\frac{l}{2} = \frac{a+\varrho}{\varrho}\sqrt{r^2-\varrho^2},$$

und dann den Inhalt des Fasses

$$= \frac{2}{3}\pi\left[3ar^2 \operatorname{ArcCos}\frac{\varrho}{r} + [2r^2+\varrho^2]\sqrt{r^2-\varrho^2}\right].$$

4. Werden die Längen b nicht jenseits sondern diesseits CD abgetragen, d. h. wird b negativ genommen, so erhält man einen zweiten Zweig der Conchoide, für welchen, wie für den zuerst betrachteten, CD Asymptote ist. Im Fall, daß $b \leq a$ ist, bildet dieser Zweig die Form in Fig. 9., hat also eine Spitze; im Fall aber $b > a$ ist, entsteht die Form Fig. 10. mit einem Knoten; in beiden Fällen wird die Coordinaten-Gleichung

$$y = \frac{a-u}{u}\sqrt{b^2-u^2};$$

für den Knotenraum aber, die absoluten Coordinaten-Werthe verstanden,

$$y = \frac{u-a}{u}\cdot\sqrt{b^2-u^2}.$$

In diesen Raum wird y ein Maximum und zwar

$$= [b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}]^{\frac{3}{2}} \text{ für } u = \sqrt[3]{ab^2}$$

und der Inhalt des ganzen Knotenraums ergiebt sich

$$a\sqrt{b^2-a^2}+b^2 \operatorname{ArcCos}\frac{a}{b}-2ab\ln\frac{b+\sqrt{b^2-a^2}}{a},$$

woraus für $a=3$, $b=5$, die Zahl 2,224.... entspringt.

§. 55.

Die Ophiuride oder Schlangenschwanzlinie.

Wählt man in jedem Schenkel eines rechten Winkels ABC (Fig. 11.) beliebig einen Punkt, A in AB, C in BC, zieht dann durch beide Punkte A, C unendlich viele Parallelen und errichtet jedesmal im Durchschnittspunkt D der durch C gelegten, mit der Richtung AB, auf CD eine Normale bis zum Durchschnittspunkt E mit der andern, so bilden alle diese Punkte E die Ophiuride.

1. Herleitung der Gleichung aus der Construktion.

Wird $AB=a$; $BC=b$; und $AC=\sqrt{a^2+b^2}=c$ gesetzt, A als Anfangspunkt der Coordinaten, AB als Achse der Abscissen x angenommen, und unter y die zugehörigen normalen Ordinaten verstanden, so hat man: für den Zweig im Raum XY die Gleichung

$$x+\frac{y^2}{x}+\frac{bx}{y}=a; \text{ oder}$$

$$y^3+x^2y-axy+bx^2=0;$$

ferner, durchaus nur absolute Coordinaten-Werthe verstanden,

für den Zweig im Raum $X(-Y)$

$$y^3+x^2y-axy-bx^2=0;$$

für den im Raum $(-X)(-Y)$

$$y^3+x^2y+axy-bx^2=0, \text{ und endlich}$$

für den im Raum $(-X)Y$

$$y^3+x^2y+axy+bx^2=0,$$

so daß also die Ophiuride eine algebraische Curve vom dritten Grad ist, und in dem Raum $(-X)Y$ kein

Punkt derselben liegt. So weit nun zusammengehörige reelle Coordinaten-Werthe existiren, gehören zu jedem Werth von y zwei Werthe für x; zu gegebenen Werthen von x können aber entweder drei Werthe von y oder nur einer sich ergeben.

2. Ermittlung von größten und kleinsten Coordinaten-Werthen.

Aus der Gleichung für die Curve, im ersten Raum folgt:

$$x = \frac{y}{2(b+y)}\left[a \pm \sqrt{a^2 - 4by - 4y^2}\right],$$

woraus hervorgeht, daß zu allen Werthen von y, welche kleiner wie $\frac{c-b}{2}$ sind, zwei verschiedene reelle Werthe für x, zu $y = \frac{c-b}{2}$ aber, als den größtmöglichsten Werth von y, nur ein Werth von x, nämlich $\frac{c-b}{c+b} \cdot \frac{a}{2}$ gehört; da nun aber auch x und y zugleich zu Null werden, also die Curve durch A gehen muß, so ist sie im Raum XY geschlossen und bildet somit einen Knoten, da noch Zweige in den Räumen X(—Y) und (—X)(—Y) existiren, die ebenfalls durch A gehen. Der größte Werth von x in diesem Raum XY ergiebt sich aus den beiden Gleichungen:

$y^3 + x^2y - axy + bx^2 = 0$ und $\partial x_y = 0$ oder $3y^2 + x^2 - ax = 0$; woraus

$$x = a - \frac{3}{2} \cdot b^{\frac{2}{3}}\left[\sqrt[3]{c+a} - \sqrt[3]{c-a}\right],$$

und, diesen Werth unter x verstanden,

$$y = \frac{3b}{2} \cdot \frac{x}{a-x} \text{ folgt.}$$

Als zweite Gleichung könnte auch die $\partial x_y = \frac{1}{0}$ oder

$$ay - 2xy - 2bx = 0$$

gebraucht werden, woraus

woraus

$$x = \frac{(c+b)^2}{2a} \text{ oder } x = \frac{c+b}{c-b} \cdot \frac{a}{2} \text{ und}$$

$$y = -\frac{c+b}{2};$$

so wie auch

$$x = \frac{(c-b)^2}{2a} \text{ oder } \frac{c-b}{c+b} \cdot \frac{a}{2} \text{ und } y = \frac{c-b}{2}$$

hervorgeht, allein ersteres Resultat giebt keinen Punkt im Raum XY und letzteres ist das schon oben gefundene, für welches y (nicht x) ein Maximum ist.

Für den zweiten Raum X(—Y) wird $\frac{c+b}{2}$ die größte Ordinate zur Abscisse $\frac{c+b}{c-b} \cdot \frac{a}{2}$, und da für x = unendlich groß der Werth von y = b wird, so hat dieser Zweig eine Asymptote, welche in der Entfernung b mit X parallel läuft und zuvor denselben in dem der Abscisse $\frac{b^2}{a}$ zugehörigen Punkt durchschneidet, zugleich aber in den Raum (—X)(—Y) verlängert, auch Asymptote dieses Zweiges wird, in welchem y fortwährend mit x wächst, also kein Maximum existirt.

3. Den Flächen-Raum des Knoten erhält man

$$= \frac{3}{4} ab - ab \ln \frac{c}{b} - \frac{3b^2 - a^2}{4} \operatorname{Arctg} \frac{a}{b},$$

woraus für a = b der Ausdruck

$$\frac{a^2}{8} [6 - \ln 16 - \pi] \text{ entspringt.}$$

VII.

Betrachtung einiger transcendenten Curven.

§. 56.

Die Kreis-Evolvende.

Wird in einer Kreislinie ein Punkt A (Fig. 12.) gewählt, dann in allen Punkten B dieser Peripherie, einerseits A, die Tangente BC = dem Bogen BA genommen, und alle diese stetig neben einander liegenden Punkte C durch eine Curve verbunden, so wird diese Abwicklungslinie vom Kreis die Kreis-Evolvende, der Kreis selbst die Evolute genannt. Eben so kann zu jeder andern Curve als Evolute, die Evolvende gebildet werden. Ist M der Mittelpunkt des Kreises; sein Halbmesser = r; der dem Bogen AB entsprechende Mittelpunkts-Winkel = φ, also AB = $r\varphi$; wird M als Anfangspunkt der Coordinaten; MA als Achse der Abscissen u, und die Normale auf AM in M als Achse der Ordinaten y angenommen, so ergeben sich sogleich u und y als Functionen von φ, nämlich

$$u = r \operatorname{Cos}\varphi + r\varphi \operatorname{Sin}\varphi;$$
$$y = r \operatorname{Sin}\varphi - r\varphi \operatorname{Cos}\varphi$$

und aus ihnen folgende Bestimmungen.

1) $\partial y_u = \operatorname{tg}\varphi;\ \partial^2 y_u = \dfrac{\operatorname{Sec}^3\varphi}{r\varphi};$

$A = r\operatorname{Cos}\varphi;\ B = r\operatorname{Sin}\varphi;\ R = r\varphi;$
d. h. die Tangente in C ist parallel mit BM und B der Mittelpunkt des Krümmungs-Kreises für diesen Punkt C.

2) Die Länge jedes Bogen AC $= \dfrac{1}{2} r\varphi^2$.

Der Inhalt der Ebene ACD $= \dfrac{1}{2} uy - \dfrac{1}{6} r^2\varphi^3$,

also der von MAC $= \dfrac{1}{6} r^2 \varphi^3$.

Es ist nämlich:

$$ACD=\int_{u\div r} ydu=r^2\int_{\varphi\div 0}\varphi \mathrm{Sin}\varphi \mathrm{Cos}\varphi d\varphi-r^2\int_{\varphi\div 0}\varphi^2 \mathrm{Cos}^2\varphi d\varphi$$

und auch

$$ACD=y\int_{u\div r} 1\cdot du-r^2\int_{\varphi\div 0}\varphi \mathrm{Sin}\varphi \mathrm{Cos}\varphi d\varphi-r^2\int_{\varphi\div 0}\varphi^2 \mathrm{Sin}^2\varphi d\varphi$$

und die halbe Summe beider Gleichungen giebt obige Formel.

§. 57.

Die Cycloiden oder Radlinien.

Ist in der Ebene eines Kreises ein fester Punkt A angenommen und wird dann dieser Kreis längs einer ebenen Curve fortgerollt, entweder in derselben Ebene oder unter constanter Neigung gegen dieselbe, so beschreibt A eine Curve, welche im Allgemeinen Cycloide heißt, im ersteren Fall eine ebene, im letzteren eine sphärische oder doppelt gekrümmte. Liegt A n der Peripherie, so heißt die Curve schlechthin Cycloide; liegt A außerhalb, verschlungen; liegt A innerhalb, gestreckt. Ist die Bahn eine gerade Linie, so gebraucht man diese Ausdrücke ohne weiteren Beisatz; ist sie irgend eine Curve und bewegt sich der Kreis auf der converen Seite, so nennt man die entstehende Curve Epicycloide; bewegt er sich auf der concaven, Hypocycloide. Insbesondere werden letztere Ausdrücke gebraucht, wenn die Bahn ein Kreis ist, außerdem ist noch die Natur der Bahn, d. h. ihre Gleichung, anzugeben.

1. Herleitung der Gleichung für die ebene Cycloide, wenn die Bahn eine Gerade ist. Der Halbmesser des erzeugenden Kreises sei = r; sein Mittelpunkt in M (Fig. 13. 14.); der Kreis berühre jetzt die Bahn in B; C sei der zweite Durchschnittspunkt der Richtung BM mit der Peripherie, und A liege in dieser Richtung, also jetzt in seiner größten Entfernung von der Bahn; MA werde durch a aus-

gedrückt; rollt nun der Kreis auf der Bahn und berührt in irgend einem Augenblick mit dem Punkte D seiner Peripherie dieselbe in D′, so ist, wenn φ den Wälzungswinkel BMD bezeichnet, $BD' = BD = r\varphi$, und der Mittelpunkt M befindet sich jetzt in M′, so daß $M'D' = r$ in D′ rechtwinklicht auf der Bahn steht; denkt man sich nun den Winkel $D'M'C' = \pi - \varphi$, $M'C' = r$, und in dieser Richtung $M'A' = a$ gemacht, so ist A′ Repräsentant jedes Punktes der Cycloide. Wählt man nun die Achse AB als Coordinaten-Achse X, den Scheitelpunkt A als Anfangspunkt der Abscissen x, so daß, A′E normal auf AB gedacht, für den Punkt A′, $AE = x$ und $A'E = y$ ist, so ergeben sich aus der Figur sogleich die beiden Gleichungen:

$$x = a - a \operatorname{Cos} \varphi;$$

$$y = r\varphi + a \operatorname{Sin} \varphi, \text{ woraus auch}$$

$$y = \sqrt{2ax - x^2} + r \operatorname{Arc Cos} \frac{a - x}{a} \text{ folgt.}$$

Ist $a > r$ (Fig. 13.), so entsteht die verschlungene;
ist $a < r$ (Fig. 14.), die gestreckte, und
ist $a = r$ (Fig. 15.), die gemeine Cycloide,
in welcher A mit C, A′ mit C′ zusammenfällt.

2. Für die gemeine ebene Cycloide (Fig. 15.) ergeben sich nun ohne Schwierigkeit folgende Resultate aus den beiden Gleichungen:

$$x = r(1 - \operatorname{Cos} \varphi); \quad y = r(\varphi + \operatorname{Sin} \varphi),$$

oder aus der:

$$y = \sqrt{2rx - x^2} + r \operatorname{Arc Cos} \frac{r - x}{r};$$

[die bisherige Bedeutung der Buchstaben in 42...44. beibehalten]

$$\operatorname{tg} \alpha = \partial y_x = \operatorname{Cotg} \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{2r - x}{x}},$$

woraus erhellet, daß die Tangente in A' mit der Sehne A'G' zusammenfällt;

$$\text{Subt.} = y \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}; \quad \text{Subn.} = y \operatorname{Cotg}\frac{\varphi}{2},$$

d. h. für den Punkt A' ist A'D' die Richtung der Normale; $A = 4r - x$; $B = r(\varphi - \operatorname{Sin}\varphi)$; $R = 4r \operatorname{Cos}\frac{\varphi}{2}$ gleich dem doppelten der Sehne A'D'.

$$\text{Bogen } AA' = 2 \cdot \sqrt{2rx} = 4r \operatorname{Sin}\frac{\varphi}{2}$$

gleich der doppelten Sehne A'G' oder BD; folglich, wenn die Bahn von dieser Cycloide in F getroffen wird;

Bogen AF $= 4r$; und $\pi - \varphi$ durch μ ausgedrückt,

Bogen A'F $= 8r \operatorname{Sin}^2\frac{\mu}{4}$;

also, wenn μ nur klein ist, annähernd:

Bogen A'F $= \frac{1}{2} r \mu^2$, (wie §. 56. 2.);

Ebene AA'E $= xy - \frac{1}{2} r^2 [\varphi - \operatorname{Sin}\varphi \operatorname{Cos}\varphi]$; daher

Ebene ABF $= \frac{3}{2} r^2 \pi$;

und also der ebene Raum, welchen die Bahn BF, diese Cycloide AA'F und die halbe Kreis-Peripherie ADB einschließt, $= r^2\pi =$ dem Inhalt der Ebene des erzeugenden Kreises.

Den Inhalt des Körpers, welchen die Ebene ABF bei der gänzlichen Umdrehung um AB erzeugt, erhält man

$$= \frac{4}{3} r^3 \pi \left[1 + \frac{9\pi^2}{8}\right].$$

2. Für die Epicycloide, wenn die Bahn ein Kreis zum Mittelpunkt N (Fig. 16.) und Halbmesser R ist, und μ den Mittelpunktswinkel an N zum Wälzungswinkel φ

bezeichnet, ergeben sich aus derselben Construction die Gleichungen:

$$R\mu = r\varphi;$$
$$x = R + 2r - (R + r)\,\mathrm{Cos}\,\mu - r\,\mathrm{Cos}(\varphi + \mu);$$
$$y = (R + r)\,\mathrm{Sin}\,\mu + r\,\mathrm{Sin}(\varphi + \mu),$$

und aus ihnen z. B.

$$\text{Bogen } AA' = \frac{4(R + r)r}{R}\,\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{2}; \text{ also}$$

$$\text{Bogen } AF = \frac{4(R + r)r}{R}.$$

3. Für die Hypocycloide (Fig. 17.), bei derselben Zeichensprache und denselben Coordinaten-Achsen, die Gleichungen:

$$R\mu = r\varphi;$$
$$x = -R + 2r + (R - r)\,\mathrm{Cos}\,\mu - r\,\mathrm{Cos}(\varphi - \mu);$$
$$y = (R - r)\,\mathrm{Sin}\,\mu + r\,\mathrm{Sin}(\varphi - \mu); \text{ woraus}$$

$$\text{Bogen } AA' = \frac{4(R - r)r}{R}\,\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{2};$$

$$\text{Bogen } AF = \frac{4(R - r)r}{R}.$$

Ist $R = 2r$, so entsteht $x = 0$; $y = 2r\,\mathrm{Sin}\frac{\varphi}{2}$; d. h. diese Hypocycloide ist eine gerade Linie.

VIII.

Betrachtung einiger Flächen.

§. 58.

Die Gestalt der Fläche zu beurtheilen, welche der Coordinaten-Gleichung vom vierten Grade

$$[x^2 + y^2 + z^2 + ab]^2 - (a + b)^2(x^2 + y^2) = 0$$

angehört.

Wird $x^2 + y^2 = u^2$ gesetzt, so entsteht aus der gegebenen Gleichung leicht folgende:

$$z^2 + u^2 - (a+b)u + ab = 0,$$

worinnen u der Repräsentant unendlich vieler Halbmesser ist, z aber die entsprechende Normale in jedem Punkt der mit u beschriebenen Peripherie, und zwar auf beiden Seiten der Ebene XY, errichtet. Verwandelt man nun noch die Summe

$$u^2 - (a+b)u + ab$$

in das Product

$$(u-a)(u-b),$$

und betrachtet a als die größere der beiden Constanten a und b, so geht die obige Gleichung über in $z^2 = (a-u)(u-b)$, und aus ihr ersieht man, daß für z nur dann existirende Längen sich ergeben, wenn $u \leqq a$ und $u \geqq b$ gewählt wird. Setzt man daher $u = b + w$, so daß w alle Werthe von 0 bis $a - b$ ausdrückt, so erhält man, $a - b$ durch d bezeichnet,

$$z^2 = (d-w)w;$$

aus welcher, dem Kreise zugehörigen Gleichung, sich ergiebt, daß die gesuchte Fläche die eines Kreisringes ist, dessen centrische Peripherie dem Halbmesser $\frac{a+b}{2}$ und dessen darauf normaler Querschnitt dem Durchmesser d angehört.

§. 59.

Auf der Achse einer Parabel werde vom Scheitelpunkt ab die Länge h abgetragen, und die dem Endpunkt von h entsprechende normale Ordinate sei $= r$; also der Achsen-Parameter dieser Parabel $= \frac{r^2}{h}$; es drehe sich diese Ebene um h, und von der, den entstehenden Umdrehungskörper begränzenden krummen Fläche wird die Gleichung verlangt.

Wird der Endpunkt von h zum Anfangspunkt O der Coordinaten gewählt, h als die Achse Z, so daß die beiden andern

Achsen X, Y in der Ebene $r^2\pi$ liegen, so entsteht sogleich die Gleichung:

$$x^2 + y^2 = p(h - z) \text{ oder}$$
$$r^2 z + h y^2 + h x^2 - h r^2 = 0 .$$

Wird nun z. B. die diese Fläche in dem Punkt zu $x = a$; $y = b$; $z = c$ tangentirende Ebene verlangt, und bezeichnen x', y', z' ihre Coordinaten, so erhält man nach §. 45. die Gleichung derselben, nämlich

$$r^2 z' + 2bhy' + 2ahx' - cr^2 - 2b^2h - 2a^2h = 0 ,$$

woraus unter andern hervorgeht, daß die in jedem Punkt der Peripherie der Grundebene tangentirende Ebene die Achse Z in der Entfernung $2h$ von O schneidet.

Anmerkung. Mehre Uebungen findet man in meinen:
Aufgelösten Aufgaben u. s. w. 1838. Volkmar.
und in meinen:
300 Aufgaben u. s. w. 1842. Duncker und Humblot.

IX.

Grundzüge der Variations-Rechnung, blos in Beziehung auf die Lösung einfacher Aufgaben zur Lehre vom Größten und Kleinsten.

§. 60.

Bezeichnet y irgend eine Function von x und man führt in dieselbe ein neues Element k ein, zwar in beliebigen Verbindungen, doch so, daß für $k = 0$ die ursprüngliche Function wieder entsteht, so sagt man: die Function ist durch k variirt, und drückt sie durch y_k aus.

Nach §. 7. ist dann

$$y_k = y + (\partial y_k)_0 \cdot k + (\partial^2 y_k)_0 \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots .$$

und es werden die Ausdrücke $(\partial y_k)_0$, $(\partial^2 y_k)_0$ u. s. w. **Variations-Coefficienten** oder kurz **Variationen** genannt und durch δy, $\delta^2 y$ u. s. w. bezeichnet, so daß die Darstellung

$$y_k = y + \delta y \cdot k + \delta^2 y \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots \text{ entsteht.}$$

Ist nun u wieder eine Function von y und man setzt das variirte y, also y_k in u_y, so geht u in u_k über und es ist

$$u_k = u + \delta u \cdot k + \delta^2 u \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots$$

Hiernach theilt man die variirten Functionen ein in **ursprünglich variirte**, wie y_k, und in **abhängig variirte**, wie u_k.

Ist $z = \partial y_x$ und man variirt durch k, so folgt

$$\partial z_k = \partial(\partial y_x)_k = \partial(\partial y_k)_x \quad (\S.\ 8.);$$

also Null für k gesetzt

$$\delta z = \partial(\delta y)_x$$

oder das Gesetz:

(I.) $\delta(\partial y_x) = \partial(\delta y)_x$.

Ist $z = \int y\,dx$, also $\partial z_x = y$, so ist, wenn zuvor mit k variirt wird,

$\partial(\partial z_x)_k = \partial y_k$ oder

$\partial(\partial z_k)_x = \partial y_k$ (§. 8.), also Null für k gesetzt,

$\partial(\delta z)_x = \delta y$, folglich

$\delta z = \int \delta y\,dx$, woraus das Gesetz

(II.) $\delta[\int y\,dx] = \int[\delta y \cdot dx]$ folgt.

§. 61.

Es sei u eine Function von x, y und z; y und z aber selbst Functionen von x; es soll δu durch δy und δz ausgedrückt werden.

Es ist $u_k = u_{y_k, z_k}$; also (nach §. 10. 3.)

$\partial u_{(k)} = \partial u_y \cdot \partial y_k + \partial u_z \cdot \partial z_k$, daher $k = 0$ gesetzt,

$\delta u = \partial u_y \cdot \delta y + \partial u_z \cdot \delta z$.

§. 62.

Es sei $V = \int u dx$; u eine Funktion von x, y und z; y und z aber selbst Functionen von x und zwar $z = \partial y_x$; es soll δv durch δy ausgedrückt werden.

Nach §. 60. (II.) ist

$$\delta V = \int \delta u dx; \text{ also nach §. 61.}$$
$$\delta V = \int \partial u_y \delta y dx + \int \partial u_z \delta z dx;$$

daher weil letzterer Summand

$$= \int \partial u_z \delta (\partial y_x) dx = \int \partial u_z \partial (\delta y)_x dx \ [\text{§. 60. (I.)}]$$
$$= \partial u_z \int \partial (\delta y)_x dx - \int \partial^{1,1} u_{x,z} [\int \partial (\delta y)_x dx] dx$$
$$= \partial u_z \cdot \delta y - \int \partial^{1,1} u_{x,z} \delta y dx$$

ist, wenn dieser Werth substituirt wird

$$\delta V = \partial u_z \delta y + \int [\partial u_y - \partial^{1,1} u_{x,z}] \delta y dx.$$

§. 63.

Es sei $V = \int u dx$; u eine Function von x, y und z; y und z aber selbst Function von x, und zwar $z = \partial y_x$. Man sucht die Function y, der Bedingung entsprechend, daß V, zwischen den Grenzen, von $x = a$ bis $x = b$, zu welchen aber y_a und y_b als Einzeln festgesetzt oder constant vorausgesetzt werden, in Vergleich zu den zunächst anliegenden Nachbarwerthen V_k einen ausgezeichneten Werth erhalte, d. h. ein Maximum oder ein Minimum werde.

Wird u variirt, geht also u über in u_k, so wird V_k aus V, und denkt man sich k unendlich klein, und einmal positiv, das anderemal negativ, so sind die Nachbar-Werthe von V ausgedrückt durch

$$V_k = V + \delta V \cdot k + \delta^2 V \cdot \frac{k^2}{(2)} + \ldots \text{ (§. 60.)}.$$

Nach der Lehre vom Größten und Kleinsten wird aber $V_{b \div a}$ nur dann einen ausgezeichneten Werth annehmen, wenn

$[\delta V]_{b \div a}$ entweder gleich 0 oder gleich $\frac{1}{0}$ wird, und berücksichtigt man nur den ersten Fall, so ist die Bedingungs-Gleichung des Maximums und Minimums

$$(\delta V)_{b \div a} = 0; \text{ oder nach §. 62.}$$

$$[\partial u_z \cdot \delta y]_{b \div a} + \int_{b \div a} [\partial u_y - \partial(\partial u_z)_x] \partial y\, dx = 0.$$

Es ist aber

$$[\partial u_z \cdot \delta y]_{b \div a} = (\partial u_z)_b \cdot (\delta y)_b - (\partial u_z)_a \cdot (\delta y)_a,$$

und da nach der Voraussetzung y nur zwischen den Grenzen von $x = a$ bis $x = b$, aber nicht an den Grenzen selbst, variirt werden kann, so ist $(\delta y)_b = 0$ so wie $(\delta y)_a = 0$ und die Bedingungsgleichung bleibt also blos:

$$\int_{b \div a} [\partial u_y - \partial(\partial u_z)_x] \delta y\, dx = 0,$$

oder $\partial u_y - \partial(\partial u_z)_x$ durch P ausgedrückt,

$$\int_{b \div a} P \cdot \delta y \cdot dx = 0.$$

Da nun aber y_k ganz willkührlich zu wählen ist, also auch z. B. $y_k = y + \frac{1}{P} k + x^2 \cdot k^3$ gewählt werden könnte, wo dann $\partial y_k = \frac{1}{P} + 3x^2 k^2$, folglich $\delta y = \frac{1}{P}$ würde und demnach

$$\int_{b \div a} P \cdot \delta y\, dx = \int_{b \div a} 1 \cdot dx \text{ d. h. } = b - a;$$

also $b - a = 0$ werden müßte, welches einen Widerspruch ausdrückt, so ist obige Bedingungs-Gleichung $\int_{b \div a} P \delta y\, dx = 0$ nur dadurch zu erfüllen, daß $P = 0$ wird. Die Differenzial-Gleichung der zweiten Ordnung $\partial u_y - \partial(\partial u_z)_x = 0$, welche zweimal integrirt, y durch x mit zwei Constanten ausdrückt, giebt daher die Lösung der Aufgabe.

Beispiele.

1. Zwischen zwei gegebenen Punkten A und B die kürzeste,

beide Punkte verbindende Curve einfacher Krümmung zu bestimmen. Wird A als Anfangspunkt der Coordinaten-Achsen X, Y gewählt (Fig. 18.) und sind a, b die Coordinaten des Punktes B; x, y die jedes Punktes C der gesuchten Curve, so ist Bogen

$$AC = \int_{x \div 0} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx,$$

also, z für ∂y_x geschrieben,

$$AB = V_{a \div 0} = \int_{a \div 0} \sqrt{1 + z^2} \cdot dx$$

und es soll y als Function von x der Bedingung entsprechend gefunden werden, daß $V_{a \div 0}$ ein Minimum wird.

Es ist hier also $u = \sqrt{1 + z^2}$ folglich $\partial u_y = 0$ und $\partial u_z = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}$ und daher die Bedingungs-Gleichung

$$0 - \partial\left(\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}\right)_x = 0,$$

woraus sogleich $\frac{z}{\sqrt{1 + z^2}} = \text{Const.}$ und hieraus dann aus $z = \text{Const.}$ oder $\partial y_x = C$; demnach $y = Cx + C'$, d. h. die gerade Linie folgt. Die beiden Constanten ergeben sich aus den Gleichungen

$$0 = C \cdot 0 + C' \text{ und } b = C \cdot a + C',$$

und substituirt man ihre Werthe, so entsteht die Gleichung

$$y = \frac{b}{a} x \text{ für die Gerade AB.}$$

2. Dieselbe Aufgabe durch Polar-Coordinaten zu lösen.

Ist für den beliebig gewählten Pol 0 (Fig. 19.), a der Radiusvector für den Punkt A; b der für den Punkt B zum Polar-Winkel AOB = α; y der Radiusvector zu jedem Punkt C der gesuchten Curve, zwischen

A und B, und x der zu y gehörige Polar-Winkel, so ist Bogen

$$AC = \int_{x \div o} \sqrt{y^2 + \partial y_x^2}\ dx;\ \text{also}$$

$$AB = V_{\alpha \div o} = \int_{\alpha \div o} \sqrt{y^2 + z^2} \cdot dx \ \text{und}$$

es soll y_x der Bedingung entsprechend ermittelt werden, daß $V_{\alpha \div o}$ ein Minimum, also kleiner wird als die zunächst anliegenden Nachbar-Werthe von AB, ausgedrückt durch $(V_k)_{\alpha \div o}$, wenn k unendlich klein gedacht und einmal positiv, das andere mal negativ gewählt wird.

Hier ist $u = \sqrt{y^2 + z^2}$; also $\partial u_y = \frac{y}{u}$;

$$\partial u_z = \frac{z}{u};\ \partial(\partial u_z)_x = \frac{u\partial z_x - z\partial u_x}{u^2}$$

also ∂y_x wieder für z gesetzt, die Bedingungs-Gleichung

$$\frac{y}{u} - \frac{u\partial^2 y_x - \partial y_x \cdot \partial u_x}{u^2} = 0,$$

woraus wenn der Werth für u nämlich $\sqrt{y^2 + \partial y_x^2}$, und zugleich $\frac{y\partial y_x + z \cdot \partial z_x}{u}$ für ∂u_x, gesetzt wird,

$$y^2 + 2\partial y_x^2 - y \cdot \partial^2 y_x = 0 \ \text{entspringt.}$$

Wird nun $y = \frac{1}{w}$ gesetzt, so folgt $w[w + \partial^2 w_x] = 0$, also da w nicht = 0 sein kann, $w + \partial^2 w_x = 0$ und wird diese Gleichung mit dem integrirenden Factor $2 \cdot \partial w_x$ multiplicirt, so giebt die erste Integration

$$w^2 + \partial w_x^2 = \text{Const};\ \text{woraus}$$

$$\partial x_w^2 = \frac{1}{c^2 - w^2};\ \text{daher}$$

$$x = \int \frac{1}{\sqrt{c^2 - w^2}} dw = \text{Arc Sin}\frac{w}{c} + \text{Const}$$

$$= \text{Arc Sin}\frac{1}{cy} + c';$$

folglich

$$\frac{1}{cy} = \operatorname{Sin}(x - c') \quad \text{oder}$$

$$y = \frac{1}{c \operatorname{Sin}(x - c')}; \quad \text{oder auch}$$

$$y = \frac{1}{N \operatorname{Sin} x + M \operatorname{Cos} x} \quad \text{folgt.}$$

Die beiden Constanten N, M ergeben sich aus

$$a = \frac{1}{N \operatorname{Sin} 0 + M \operatorname{Cos} 0} \text{ und } b = \frac{1}{N \operatorname{Sin} \alpha + M \operatorname{Cos} \alpha}$$

und wenn die hieraus für N und M hervorgehenden Werthe substituirt werden, so folgt

$$y = \frac{ab \operatorname{Sin} \alpha}{a \operatorname{Sin} x + b \operatorname{Sin}(\alpha - x)}$$

welche Gleichung die Gerade AB ausdrückt. (§. 37. 6.)

3. Zwischen zwei gegebenen Punkten A und B Fig. 20. die Curve zu bestimmen, welche, wenn sie in bleibender Entfernung, um eine Gerade CD in derselben Ebene, herum gedreht wird, die kleinste Oberfläche F beschreibt.

Wählt man CD als Achse der x, den Anfangspunkt O im Fußpunkt der Normale c aus A auf CD und sind a und b die Coordinaten von B, so soll, ∂y_x unter z verstanden,

$$F_{a \div o} = 2\pi \int_{a \div o} y\sqrt{1 + z^2} \cdot dx$$

ein Minimum werden. Es ist hier $u = y\sqrt{1 + z^2}$; also

$$\partial u_y = \sqrt{1 + z^2}; \quad \partial u_z = \frac{yz}{\sqrt{1 + z^2}}$$

und daher die Bedingungs-Gleichung

$$\sqrt{1 + z^2} - \partial\left(\frac{yz}{\sqrt{1 + z^2}}\right)_x = 0.$$

Um sie zu integriren, werde $\sqrt{1+z^2} = \partial w_x$ gesetzt, so folgt

$$w - \frac{y \partial y_x}{\partial w_x} = \text{Const}$$

und hieraus, diese Constante durch $\frac{1}{2}A$ ausgedrückt,

$$w^2 - y^2 + B = Aw,$$

unter B eine Constante verstanden, so wie auch

$$\partial y_x = \frac{2w - A}{2y} \partial w_x = \frac{2w - A}{2\sqrt{B - Aw + w^2}} \partial w_x .$$

Wird dieser Werth nun in die Gleichung $\sqrt{1+z^2}$ d. h. $\sqrt{1 + \partial y_x^2} = \partial w_x$ substituirt, und zugleich C für $\frac{1}{2}\sqrt{4B - A^2}$ geschrieben, so erhält man

$$\partial x_w = C \frac{1}{\sqrt{B - Aw + w^2}} ;$$

und hieraus

$$x = C \cdot \ln[-A + 2w + 2\sqrt{B - Aw + w^2}] + C' .$$

Aus der Gleichung $w^2 - y^2 + B = Aw$ nun w ent- entwickelt und substituirt, so folgt, wenn die Wurzel positiv genommen wird, indem der negative Werth der Bedingungs-Gleichung nicht genügt,

$$x = C \ln[y + \sqrt{y^2 - C^2}] + C'$$

welches die Gleichung der gesuchten Curve ist und eine Kettenlinie darstellt.

Zu Bestimmung der beiden Constanten C und C' liefert die Aufgabe die beiden Gleichungen

$$0 = C \cdot \ln[c + \sqrt{c^2 - C^2}] + C' \text{ und}$$

$$a = C \cdot \ln[b + \sqrt{b^2 - C^2}] + C' \text{ woraus auch}$$

$$a = C \cdot \ln \frac{b + \sqrt{b^2 - C^2}}{c + \sqrt{c^2 - C^2}} \text{ folgt,}$$

welche Gleichung zur annähernden Bestimmung von C zu verwenden ist.

Es ergiebt sich nun auch leicht $\partial y_x = \frac{\sqrt{y^2 - C^2}}{C}$

und dann

$$F_{a \div o} = \pi [b\sqrt{b^2 - C^2} - c \cdot \sqrt{c^2 - C^2} + aC].$$

Ist $c = 25$; $a = 8$; $b = 40$, so folgt ziemlich genau $C = 14{,}94$ und $F = 1102{,}6 \cdot \pi$. Für die Fläche, welche die Gerade AB beschreibt, entsteht der Ausdruck $1105 \cdot \pi$ welcher nur wenig größer als F ist.

Analytische Mechanik.

(§. 64 bis 97.)

I.

Gegenstand der Untersuchungen, Zeichensprache, und allgemeine Begriffe und Gesetze.

§. 64.

Gegenstände und Zeichensprache.

Die stetige Ortsänderung eines Punktes heißt **Bewegung**; sein Beharren an demselben Orte, **Ruhe**. Die gerade, gebrochene oder krumme Linie, welche ein bewegter Punkt durchläuft, heißt seine **Bahn** oder der **Weg**, auch der beschriebene **Raum**. Werden in gleichen, stetig auf einander folgenden Zeittheilen auch fortwährend gleiche Bahntheile durchlaufen, so heißt die Bewegung **gleichförmig** oder **constant**; im Gegentheil **ungleichförmig** oder **veränderlich**. Bei der constanten Bewegung sagt man: der Punkt habe an jeder Stelle der Bahn eine und dieselbe (constante) **Geschwindigkeit**; bei der veränderlichen Bewegung sagt man: der Punkt habe an verschiedenen Stellen der Bahn auch eine verschiedene oder **veränderliche Geschwindigkeit**, und nennt diese größer oder kleiner, je nachdem das Bahntheilchen während eines Augenblicks oder unendlichen kleinen Zeittheilchens größer oder kleiner ist. Die Ursache der Bewegung eines Punktes oder auch eines Körpers, oder einer Veränderung derselben, entweder in Beziehung auf die Richtung oder auf die Geschwindigkeit, oder auf beide, heißt **Kraft**. Aeußert sich dieselbe auf einen ruhenden Punkt nur einmal, d. h. wirkt sie nur augenblicklich, so setzt sie denselben, jedes Hinderniß als beseitigt angesehen, in eine constante Bewegung in einer bestimmten Richtung und mit

einer bestimmten Geschwindigkeit, (oder ertheilt demselben, wenn er schon in derselben Richtung in Bewegung war, eine Vermehrung, wenn er in direkt entgegengesetzter Richtung in Bewegung war, eine Verminderung an Geschwindigkeit); letztere wird, da Kräfte nur aus ihren Wirkungen zu erkennen sind, als Maaß der Kraft dienen, und wird daher oft die Kraft selbst genannt; wiederholt aber die Kraft in jedem folgenden Augenblick, also stetig, ihre Wirkung mit bleibender oder stetig sich ändernder Intensität, so wird die Bewegung veränderlich; geradlinig, wenn die Richtung constant bleibt; krummlinig, wenn auch die Richtung sich stetig ändert.

Wirken auf alle einzelnen und als gleich gedachte Theile, d. h. auf alle Punkte eines Körpers gleiche Kräfte nach parallelen Richtungen, so ist es, nach der Theorie paralleler Kräfte, dasselbe, als wenn die Summe dieser Kräfte in derselben Richtung auf den Schwerpunkt dieses Körpers wirkte, und während der Bewegung stört kein Theil den andern. Sind aber diese Kräfte verschieden, oder die Richtungen nicht parallel, oder findet beides zugleich statt, so kann jeder einzelne Punkt auch seine eigenthümliche Geschwindigkeit und eigenthümliche Richtung haben, also die Bewegung zugleich eine fortschreitende und eine drehende sein. Ist in einem solchen Falle von der Geschwindigkeit des Körpers in irgend einem Augenblick die Rede, so versteht man darunter allemal die seines Schwerpunktes.

Bei jedem durch bestimmte Kräfte in Bewegung gesetzten Körper für jeden einzelnen Punkt desselben die in jedem Augengenblick stattfindende Geschwindigkeit, mit der durchlaufenen Bahn nach ihrer Gestalt und Länge, so wie mit der unterdessen verflossenen Zeit zu vergleichen, auch die bei einer solchen Bewegung ins Leben tretenden Wirkungen zu bestimmen, ist der Gegenstand der Mechanik.

Es bezeichne durchaus für den in Rede stehenden beweg-

ten Punkt: s die Länge des durchlaufenen Weges in Fußen, t die währenddem verflossene Zeit in Secunden und v ebenfalls in Fußen die im letzten Augenblick der Zeit t stattfindende Geschwindigkeit; ferner dt die unendlich kleine, als constant zu betrachtende Differenz jeder zwei unmittelbar auf einander folgenden Werthe von t; ds den während dieses Augenblicks dt durchlaufenen Weg, und dv den positiven oder negativen Zuwachs zu v während dieser Zeit dt.

§. 65.

Bestimmung von v durch s und t für jede Bewegung eines Atoms und des Gesetzes der constanten Bewegung.

Nach §. 64. versteht man unter Geschwindigkeit im letzten Augenblick der Zeit t das Verhältniß von ds zu dt, und hat daher $v = \frac{ds}{dt}$. Es ist aber nach §. 33. $\frac{ds}{dt} = \partial s_t$, und folglich die verlangte auch für krummlinigte Bewegungen gültige Gleichung

$$\text{(I.)} \quad v = \partial s_t \, .$$

Ist nun die Bewegung constant, bleibt v unverändert, immer $= c$, so folgt aus dieser Gleichung, da s und t zugleich anfangen,

$$s = ct,$$

welche Gleichung das ganze Gesetz der constanten Bewegung ausdrückt.

Für $t = 1$ folgt aus ihr

$$c = s,$$

und es ist daher, bei constanter Bewegung, unter Geschwindigkeit der Weg während jeder Secunde zu verstehen.

II.

Geradlinigte Bewegung.

§. 66.

Vergleichung der Kraft mit t und v.

Wirkt auf einen Punkt eine Kraft (oder auf alle Punkte eines Körpers auf jeden diese Kraft, und alle in parallelen Richtungen), aber nicht blos einmal oder augenblicklich, sondern erneuert dieselbe ihre erste Einwirkung in jedem Augenblick stetig, und zwar mit derselben oder mit stetig veränderter Gewalt in unveränderter Richtung, oder treten stetig neue Kräfte nach irgend einem Gesetz wachsend oder abnehmend, oder auch constant bleibend, in derselben Richtung hinzu, und man versteht unter 2G die Geschwindigkeit, welche sich in einer Secunde dann ansammeln würde, wenn die Kräfte, welche am Schluß irgend einer Zeit t, also während des nun folgenden Augenblicks dt einwirken, von jetzt ab eine volle Secunde hindurch auf den anfangs ruhenden Punkt, ohne ihre Intensität während dieser Secunde zu verändern, einwirken würden, ferner unter n die (unendlich große) Anzahl dieser Einwirkungen während dieser Secunde, so ist $n \cdot dt = 1$ und $\frac{2G}{n}$ oder $2G \cdot dt$ die Geschwindigkeit, welche jede einzelne dieser n Einwirkungen, also auch die im ersten Augenblick dt am Schluß der Zeit t neu hinzutretende, als Zuwachs zu v hervorruft, folglich gleich mit dv, und 2Gdt sowohl wie das denselben Geschwindigkeits-Zuwachs bezeichnende Bild dv ist daher das Maaß der in diesem Augenblick dt neu hinzutretenden Kraft oder Kräfte (häufig die Kraft selbst genannt). Aus der Gleichung $dv = 2G\,dt$ entspringt aber nach §. 33. die:

$$\text{(II.)} \quad \partial v_t = 2G\,.$$

Im Fall nun $2G$ wirklich constant ist, — d. h. im Fall für jeden Werth von t der Zuwachs dv an Geschwindigkeit in jedem constanten Augenblick dt unverändert immer derselbe bleibt, und (wie durchaus, wenn nicht das Gegentheil bestimmt ausgesprochen ist, vorausgesetzt wird) t, s und v zugleich anfangen, so daß, wenn $t = 0$ gesetzt wird, auch $s = 0$ und $v = 0$ zu denken ist, — folgt aus (II.) sogleich:

$$v = 2Gt$$

und dann aus (I.)

$$s = Gt^2,$$

und aus letzterer Formel entspringt, wenn $t = 1$ gesetzt wird,

$$G = s.$$

Es drückt daher G in jedem Augenblick während der Bewegung, also am Schluß jeder Zeit t, die Länge des Weges aus, welchen der Punkt (oder alle Punkte des Körpers) in einer Secunde dann zurücklegen würde, wenn die Kräfte, welche im nächsten Augenblick dt einwirken, während dieser Secunde auf den zu Anfang derselben ruhenden Punkt, ohne ihre Intensität während derselben zu verändern, einwirken würden. Es wird G die Beschleunigung dieses Augenblicks genannt, und für den freien Fall durch kleine Höhen nahe an der Oberfläche unserer Erde, wo die Schwere als eine constante Kraft angesehen werden kann, ist nach Erfahrungen der Werth von G gleich $15\frac{5}{8}$ Fuß, welche Zahl in der Folge durch g ausgedrückt werden soll.

§. 67.

Begriff der Worte: Masse, absolutes Gewicht, specifisches Gewicht, und Einheiten für dieselben.

Die Menge Materie eines Körpers nennt man seine Masse, und diese Masse oder Menge materieller Atome ist desto

größer, je größer das Gewicht dieses Körpers ist. Die Einheit, worauf Gewichte bezogen werden, sei das Pfund, und wenn also gesagt wird, daß ein Körper das Gewicht Q habe, so versteht man unter Q die absolute Zahl, welche die Menge Pfunde angiebt, die dieser Körper wiegt, also den Druck, den derselbe ruhend auf eine ihn unterstützende oder tragende horizontale Ebene ausübt. Als Einheit für den Begriff Masse ist es für die Rechnung bequem, die Masse oder Menge Atome zu wählen, deren Gewicht $= 2g$ oder $31\frac{1}{4}$ Pfund ist, und wenn also gesagt wird, daß ein Körper die Masse M habe, so versteht man unter M die absolute Zahl, für welche M mal 2g das Gewicht dieses Körpers ausdrückt. Beziehen sich daher Q und M auf denselben Körper, so ist

$$\text{(III.)} \quad Q = 2g \cdot M\,.$$

Versteht man in Beziehung auf irgend eine Materie unter β die absolute Zahl, welche mit dem Gewicht irgend einer Quantität reinen Wassers multiplicirt, das Gewicht einer gleichen Quantität der in Rede stehenden Materie ausdrückt, so nennt man β das specifische Gewicht dieser Materie. Wiegt daher ein Cubikfuß Wasser γ Pfunde (in Berliner Pfunden ist $\gamma = 66$ zu setzen), so ist für eine Materie, deren specifisches Gewicht $= \beta$ ist, das absolute Gewicht eines Cubikfußes $= \beta \cdot \gamma$, und wenn ein Volumen dieser Materie V Cubikfuße enthält, und das absolute Gewicht des Volumens V dieser Materie $= Q$ ist, so findet allemal die Gleichung

$$\text{(IV.)} \quad Q = V\beta\gamma \quad \text{statt.}$$

§. 68.

Bestimmung von G.

Wirkt auf eine ruhende Masse von q Pfunden eine, durch ihren Schwerpunkt gerichtete, constante Kraft von p Pfunden in bleibender Richtung und Größe stetig ein, und steht kein

Hinderniß der entstehenden Bewegung entgegen, so ist der Weg in der ersten Secunde der Bewegung, d. h. G, bestimmt durch die Formel:

$$(V.) \quad G = g\frac{p}{q}.$$

Bezeichnet nämlich M die in Bewegung gesetzte Masse, so daß $q = 2gM$ ist, m die Anzahl der Atome in M; n die Anzahl der stetig in ununterbrochener Reihenfolge erfolgenden Einwirkungen von p während einer Secunde, und c die Geschwindigkeit, welche die erste Einwirkung hervorruft, so wie den Zuwachs an Geschwindigkeit durch jede neu erfolgende Einwirkung, deren Zeitdauer $= n = \frac{1}{dt}$ ist (§. 66.), so hat man, weil 2G die, während dieser Dauer von einer Secunde, angesammelte Geschwindigkeit ausdrückt, $c = \frac{2G}{n} = 2G\,dt$ und $\frac{p}{m}$ als Ausdruck für die Kraft, welche jedem einzelnen Atom, wenn er ruhend ist, durch einmalige Einwirkung diese Geschwindigkeit mittheilen wird, so daß also $\frac{p}{m}$ als die Ursache und $2G\,dt$ als die Wirkung derselben erscheint, und da die Ursachen nur aus den Wirkungen zu erkennen sind, so folgt, wenn q', p', M', m', G' sich eben so aufeinander beziehen, wie q, p, M, m, G,

$$\frac{p}{m} : \frac{p'}{m'} = 2G\,dt : 2G'dt, \text{ oder}$$

$$G : G' = \frac{p}{m} : \frac{p'}{m'}.$$

Besteht nun die Massen-Einheit (deren Gewicht also $= 2g$ Pfunde ist) aus k Atomen, so ist $\frac{2g}{k}$ das Gewicht jedes Atoms, also $q = m \cdot \frac{2g}{k}$ und $q' = m' \cdot \frac{2g}{k}$, also $q : q'$

$= m : m'$ und die vorige Proportion nimmt die Gestalt

$$G : G' = \frac{p}{q} : \frac{p'}{q'} \text{ an.}$$

Bezieht man nun p', q', G' auf den freien Fall für geringe Höhen nahe an der Erdoberfläche, so ist $G' = g = 15\frac{5}{8}$ und $p' = q'$, denn beim freien Fall ist das Gewicht der Masse die Ursache der Bewegung derselben Masse, und substituirt man diese Werthe, so folgt

$$G = g\frac{p}{q},$$

in welcher Formel p die Ueberwucht oder bewegende Kraft, und $\frac{p}{q}$ die beschleunigende Kraft genannt wird.

Ist $\frac{p}{q}$, also auch G constant, so heißt die Bewegung: gleichförmig beschleunigt, wenn p positiv, gleichförmig verzögert, wenn p negativ ist; ist aber $\frac{p}{q}$ veränderlich, mittelbar oder unmittelbar abhängig von t, so heißt auch die Bewegung veränderlich.

§. 69.

Gesetze der gleichförmig beschleunigten Bewegung.

Auf einen Körper vom Gewicht q, dessen Atome alle schon eine Geschwindigkeit c in irgend einer Richtung besitzen, wirkt in derselben Richtung zu demselben Ziel, durch den Schwerpunkt desselben gehend, eine unveränderlich dieselbe bleibende Kraft p stetig ein. Es sollen t, s, c und v verglichen werden.

Bezeichnet G den hier constant bleibenden Ausdruck $g\frac{p}{q}$, so folgt aus den beiden Grundgleichungen §. 65. (I.) und §. 66. (II.), nämlich

$$\partial s_t = v \text{ und } \partial v_t = 2G \text{ sogleich}$$
$$v = 2Gt + \text{Const und dann}$$
$$s = Gt^2 + \text{Const} \cdot t + \text{Const}'.$$

Da nun hier zwar t und s zugleich anfangen, also zugleich $= 0$ werden, v aber, für $t = 0$ und $s = 0$, in c übergeht, also $= c$ wird, so ergeben sich hieraus die beiden Constanten und dann die verlangten Grundgleichungen:

$$v = c + 2Gt \text{ und}$$
$$s = ct + Gt^2,$$

aus welchen, wenn man t eliminirt, zur unmittelbaren Vergleichung von v und s auch noch $v^2 = c^2 + 4Gs$ folgt.

Findet keine Anfangsgeschwindigkeit statt, ist also $c = 0$; so werden diese drei Gleichungen

$$v = 2Gt;\ s = Gt^2;\ v = 4Gs.$$

§. 70.

Freier Fall.

Für den freien Fall durch geringe Höhen nahe an der Erdoberfläche, wo $q = p$, also $G = g$ ist, hat man daher, wenn die Anfangsgeschwindigkeit c stattfindet,

$$v = c + 2gt;\ s = ct + gt^2;\ v^2 = c^2 + 4gs;$$

und, wenn $c = 0$ ist,

$$v = 2gt;\ s = gt^2;\ v^2 = 4gs.$$

§. 71.

Gesetze der gleichförmig verzögerten Bewegung.

Die Aufgabe bleibe wie in §. 69., nur wirke die Kraft p zu direkt entgegengesetztem Ziel.

In diesem Fall werden die Grundgleichungen:

$$\partial s_t = v \text{ und } \partial v_t = -2G$$

und es ergiebt sich, wie in §. 69.,

$$v = c - 2Gt; \quad s = ct - Gt^2; \quad v^2 = c^2 - 4Gs.$$

Bezeichnet für solche Bewegungen, T die ganze Zeitdauer derselben bis zum Stillstand also bis zu dem Augenblick, wo $v = 0$ ist, und S die ganze Bahn in dieser Zeit T, so folgt

$$c = 2GT \text{ und } S = GT^2.$$

und setzt man in diese fünf Gleichungen g für G, so entspringen die Gesetze der Bewegung eines mit der Geschwindigkeit c lothrecht in die Höhe geworfenen Körpers.

§. 72.

Bewegung auf einer schiefen Ebene.

Befindet sich ein Körper vom Gewicht q auf einer unter dem spitzen Winkel α gegen den Horizont geneigten Ebene, so entspringt aus q ein abgleitendes Bestreben $= q \operatorname{Sin}\alpha$ und ein Normaldruck $= q \operatorname{Cos}\alpha$ auf die geneigte Ebene; aus letzteren entsteht ein Reibungs-Hinderniß $= \mu q \operatorname{Cos}\alpha$ und ist $\mu q \operatorname{Cos}\alpha \geqq q \operatorname{Sin}\alpha$, so bleibt der Körper in Ruhe, wenn er ruhend war; ist aber $q \operatorname{Sin}\alpha > \mu q \operatorname{Cos}\alpha$, so wirkt auf Heruntergleiten eine Ueberwucht $p = q \operatorname{Sin}\alpha - \mu q \operatorname{Cos}\alpha$ und es ist der constante Werth von $\frac{p}{q} = \operatorname{Sin}\alpha - \mu \operatorname{Cos}\alpha$; folglich $G = g(\operatorname{Sin}\alpha - \mu \operatorname{Cos}\alpha)$.

Hat nun der Körper beim Beginnen der Bewegung, abwärts, schon eine Anfangsgeschwindigkeit c, so geben, nach §. 69. die Gleichungen

$$v = c + 2g(\operatorname{Sin}\alpha - \mu \operatorname{Cos}\alpha) \cdot t \text{ und}$$
$$s = ct + g(\operatorname{Sin}\alpha - \mu \operatorname{Cos}\alpha) \cdot t^2;$$

und wenn $c = 0$ ist, die

$$v = 2g(\operatorname{Sin}\alpha - \mu \operatorname{Cos}\alpha) \cdot t \text{ und}$$
$$s = g(\operatorname{Sin}\alpha - \mu \operatorname{Cos}\alpha) \cdot t^2$$

die Gesetze der Bewegung, und erstere liefern, dann wenn

$\mu q \text{Cos}\alpha = q \text{Sin}\alpha$ ist; $v = c$ und $s = ct$ also eine constante Bewegung (§. 65.); dann aber, wenn $\mu q \text{Cos}\alpha > q \text{Sin}\alpha$ ist, die ganze Zeitdauer der Bewegung oder

$$T = \frac{c}{2g(\mu \text{Cos}\alpha - \text{Sin}\,a)}$$

und den entsprechenden ganzen Weg

$$S = \frac{c^2}{4g(\mu \text{Cos}\alpha - \text{Sin}\alpha)}, \text{ oder } S = \frac{cT}{2}.$$

Hat aber der Körper **aufwärts steigend** die Anfangsgeschwindigkeit c, so ist in jedem Fall die direkt entgegen wirkende Kraft $= q \text{Sin}\alpha + \mu q \text{Cos}\alpha$ also die ihr entsprechende und negativ in Rechnung zu bringende Beschleunigung

$$G = g(\text{Sin}\alpha + \mu \text{Cos}\alpha)$$

und es folgen die Gleichungen:

$$v = c - 2g(\text{Sin}\alpha + \mu \text{Cos}\alpha)t \text{ und}$$
$$s = ct - g(\text{Sin}\alpha + \mu \text{Cos}\alpha)\,t^2$$

aus welchen für die ganze Dauer der Bewegung

$$T = \frac{c}{2g(\text{Sin}\alpha + \mu \text{Cos}\alpha)} \text{ und}$$

$$S = \frac{c^2}{4g(\text{Sin}\alpha + \mu \text{Cos}\alpha)} \text{ oder } S = \frac{cT}{2}$$

entsteht.

§. 73.

Vergleichungen des freien Falls mit dem auf einer schiefen Ebene.

Wird vorausgesetzt, daß beide Bewegungen ohne Anfangsgeschwindigkeit erfolgen und auf der schiefen Ebene keine Reibung statt finde, beziehen sich t, s, v, g auf den freien Fall; t', s', v', G auf die abwärts gerichtete Bewegung längs der schiefen Ebene, und bezeichnet h die Höhe, a die Länge dersel-

ben, so daß $\mathrm{Sin}\,\alpha = \frac{h}{a}$ ist, so ergeben sich aus den bisherigen Gesetzen sogleich folgende Vergleichungen:

$$G : g = h : a$$

$$\left.\begin{matrix} v' : v = h : a \\ s' : s = h : a \end{matrix}\right\} \text{ wenn } t' = t \text{ ist}$$

$$\left.\begin{matrix} t' : t = a : h \\ v' = v \end{matrix}\right\} \text{ wenn } s' = a \text{ und } s = h \text{ ist.}$$

Die dritte Vergleichung drückt das Galileische Gesetz aus; die fünfte findet bei Bewegung des Wassers in geneigten Gerinnen Anwendung.

§. 74.

Lothrechte Bewegung von Gewichten an einer Rolle.

Ueber eine um ihre horizontale Achse drehbare Rolle ist ein Faden gelegt, der beiderseits lothrecht herab hängt und an dessen beiden Endpunkten verschiedene Gewichte hängen; die entstehende Bewegung zu bestimmen, wenn voraus gesetzt wird, daß Rolle, Zapfen und Faden ohne Masse sind, auch keine Reibung existire.

Bezeichnet A das größere, B das kleinere Gewicht, so ist hier $p = A - B$; $q = A + B$; also der constante Werth von G für jeden Atom in beiden Massen A und B, gleich $\frac{A-B}{A+B} \cdot g$ und es ist daher, wenn keine Anfangsgeschwindigkeit statt findet,

$$v = 2g\frac{A-B}{A+B} \cdot t; \quad s = g\frac{A-B}{A+B} \cdot t^2;$$

wenn aber, in der Richtung der Bewegung, der Faden schon eine Anfangsgeschwindigkeit c hat,

$$v = c + 2g\frac{A-B}{A+B}t; \quad s = ct + g\frac{A-B}{A+B}t^2;$$

und dann, wenn der Faden in der entgegengesetzten Richtung die Anfangsgeschwindigkeit c haben sollte,

$$v = c - 2g\frac{A-B}{A+B}t;\quad s = ct - g\frac{A-B}{A+B}t^2$$

welche Bewegung aufhört, wenn

$$t = T = \frac{c}{2g}\cdot\frac{A+B}{A-B} \text{ und}$$

$$s = S = \frac{c^2}{4g}\cdot\frac{A+B}{A-B}$$

geworden ist, worauf dann in entgegengesetzter Richtung die zuerst betrachtete Bewegung erfolgt.

§. 75.

Veränderliche geradlinigte Bewegung.

Wirken auf alle Atome einer Masse vom Gewicht q gleiche parallele Kräfte oder wirkt die Summe p derselben in einer durch den Schwerpunkt der Masse gehenden mit obigen Richtungen paralleler Richtung, ist aber $\frac{p}{q}$ nicht constant sondern nach irgend einem Gesetz veränderlich, so geben die beiden Grundgleichungen §. 65. I. und §. 66. II., nämlich:

$$(I.)\ \partial s_t = v \text{ und } (II.)\ \partial v_t = 2G;$$

aus welchen auch noch die, für manche Untersuchungen, sehr bequeme dritte Gleichung

$$(III.)\ \partial^2 s_t = \partial v_t = 2G = \partial v_s \cdot \partial s_t = v\partial v_s$$

hervorgeht, wenn man in dieselben den Werth von G setzt, welchen derselbe im letzten Augenblick der Zeit t hat, nach erfolgter Integration, die Gesetze der Bewegung, wobei aber, je nachdem das Gesetz der Veränderlichkeit von $\frac{p}{q}$ beschaffen ist, diese Integration ihre Schwierigkeit haben kann.

Die Aufgabe in den folgenden §. 76. bis 78. sind als hiehergehörige Beispiele zu betrachten.

§. 76.

Lothrechte Bewegung von Gewichten an einer Rolle.

Die Aufgabe sei dieselbe wie in §. 74., aber der Faden sei schwer gedacht, und jeder Fuß desselben habe das Gewicht k, doch bleibe die Steifigkeit dieses Fadens unberücksichtigt, und s so wie v sei für die centrische Linie dieses Fadens zu verstehen, auch werde die Masse des Theiles des Fadens welcher während der Bewegung die Rolle berührt, nicht in Betrachtung gezogen.

Ist, ohne Anfangsgeschwindigkeit, in den ersten t Secunden der Weg s durchlaufen, so ist im letzten Augenblick dieser Zeit t, wenn die anfängliche Länge des lothrechten Fadentheils woran A hängt durch a, die woran B hängt, durch b ausgedrückt und vorausgesetzt wird, daß $A + ka > B + kb$ ist, $p = A + k(a + s) - B - k(b - s)$ oder, den constanten Ausdruck $A - B + k(a - b) = c$ gesetzt, $p = c + 2k \cdot s$; dann, unveränderlich, $q = A + B + k(a + b)$ und daher für den, am Schuß der Zeit t, folgenden Augenblick dt,

$$G = g \frac{c + 2ks}{q}.$$

Zur Relation zwischen v und s führt nun die Gleichung (III.) auf den kürzesten Weg; sie giebt

$$v \partial v_s = 2g \frac{c + 2ks}{q},$$

woraus, da nach der Voraussetzung keine Anfangsgeschwindigkeit statt findet,

$$v^2 = \frac{4g}{q}[cs + ks^2] \text{ folgt.}$$

Nun giebt die erste Gleichung

$$\frac{1}{\partial t_s} = \sqrt{\frac{4g}{q}} \cdot \sqrt{cs + ks^2}; \text{ also}$$

$$\partial t_s = \sqrt{\frac{q}{4g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{cs + ks^2}}$$

und hieraus ergiebt sich, nach §. 28. 8.,

$$t = \sqrt{\frac{q}{4gk}} \ln \frac{c + 2ks + 2\sqrt{k} \cdot \sqrt{cs + ks^2}}{c}.$$

Durch Elimination von s aus den beiden gefundenen speciellen Gleichungen, folgt nun auch zur Vergleichung zwischen t und v,

$$t = \sqrt{\frac{q}{4gk}} \ln \frac{v\sqrt{kq} + \sqrt{c^2 g + kqv^2}}{c\sqrt{g}}.$$

§. 77.

Gesetze des freien Falls mit Berücksichtigung des allgemeinen Attractions-Gesetzes.

Nach diesem Gesetz verhalten sich die anziehenden Kräfte der Körper umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen, wenn also die anziehende Kraft unseres Erdkörpers an der Oberfläche desselben, die Beschleunigung g erzeugt, so ist diese Beschleunigung in der Entfernung e vom Mittelpunkt der Erde, wenn r ihren mittleren Halbmesser bezeichnet $= \frac{r^2}{e^2} \cdot g$.

Beginnt daher, ohne Anfangsgeschwindigkeit, der freie Fall in der Entfernung a vom Mittelpunkt der Erde, so ist, nachdem der fallende Körper den Weg s in der Zeit t durchlaufen hat, in dem folgenden Augenblick dt, die Beschleunigung

$$G = \frac{r^2}{(a-s)^2} \cdot g$$

und also aus III.

$$v \partial v_s = 2 \frac{g r^2}{(a-s)^2}, \text{ woraus}$$

$$v^2 = \frac{4 g r^2}{a - s} + \text{Const folgt.}$$

Für s = 0 ist aber auch nach der Voraussetzung v = 0;

$$\text{daher Const} = -\frac{4gr^2}{a} \text{ und daher}$$

$$v^2 = \frac{4gr^2}{a}\cdot\frac{s}{a-s}.$$

Aus

$$\partial s_t = v = 2r\sqrt{\frac{g}{a}}\cdot\sqrt{\frac{s}{a-s}} \text{ folgt nun}$$

$$\partial t_s = \frac{\sqrt{a}}{2r\sqrt{g}}\cdot\sqrt{\frac{a-s}{s}}; \text{ also}$$

$$t = \frac{\sqrt{a}}{2r\sqrt{g}}\int\frac{\sqrt{as-s^2}}{s}ds$$

und hieraus nach §. 28. 15.,

$$t = \frac{\sqrt{a}}{2r\sqrt{g}}\left[\sqrt{as-s^2} + a\,\text{Arc Sin}\sqrt{\frac{s}{a}}\right].$$

§. 78.

Gesetze des lothrechten Steigens mit Rücksicht auf den Widerstand der Luft.

Wird ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit c lothrecht in die Höhe geworfen, die Veränderlichkeit der Anziehungskraft unserer Erde nicht berücksichtigt, wohl aber der Widerstand der Luft, und angenommen daß derselbe mit dem Quadrat der Geschwindigkeit wachse, also in dem Augenblick, wo diese $= v$ ist, der diesen Widerstand entsprechende Werth von G durch $\mu\cdot v^2$ ausgedrückt werden kann, unter μ einen constanten Factor verstanden, so ist nach Verlauf der Zeit t, während des folgenden Augenblicks dt, die Beschleunigung $= g + \mu v^2$, aber der bestehenden Bewegung entgegengesetzt, also aus III., $v\partial v_s = -2g - 2\mu v^2$, woraus

$$s = \frac{1}{4\mu}\ln\frac{g+\mu c^2}{g+\mu v^2}$$

folgt. Aus I. erhält man dann, durch eine ebenfalls leichte Integration

$$t = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}}\left[\operatorname{Arc\,tg}\left(c\sqrt{\frac{\mu}{g}}\right) - \operatorname{Arc\,tg}\left(v\sqrt{\frac{\mu}{g}}\right)\right].$$

Für die Zeit T des ganzen Steigens und die ganze Steighöhe S entspringt aus diesen Formeln

$$S = \frac{1}{4\mu}\ln\frac{g+\mu c^2}{g};\quad T = \frac{1}{2\sqrt{\mu g}}\operatorname{Arc\,tg}\left(c\sqrt{\frac{\mu}{g}}\right).$$

III.

Freie Bewegung in einer ebenen Curve.

§. 79.

Herleitung der Grundgleichungen.

Wird dem Schwerpunkt eines Körpers, während er sich in A befindet, in irgend einer Richtung AB (Fig. 21) eine Anfangsgeschwindigkeit c mitgetheilt, und wirken während seiner nun erfolgten Bewegung, constante oder veränderliche Kräfte stetig, ebenfalls in Richtungen durch den Schwerpunkt gehend, auf denselben ein, in constanten oder veränderlichen Richtungen, doch für jede dieser Kräfte, wenn sie sich auf alle Atome der Masse des Körpers gleichförmig vertheilt, diese einzelnen Kräfte unter sich in parallelen Richtungen bleibend, so wird der Körper dadurch im Allgemeinen von der Richtung AB immer mehr abgelenkt und jeder seiner Punkte beschreibt eine Curve. Wenn nun vorausgesetzt wird, daß die Richtungen aller einwirkenden Kräfte, im Schwerpunkt des Körpers vereint gedacht, in einer durch AB gelegten lothrechten Ebene liegen, so daß die Bahn oder Curve, welche der Schwerpunkt beschreiben wird, in derselben Ebene liegen muß, so soll nicht nur die stattfindende Relation zwischen der Anfangsgeschwindigkeit, den Kräften und der Form der entstehenden Curve, son-

dern es sollen auch die Gleichungen zur Bestimmung von s und v zu Ende jeder Zeit t ermittelt werden.

Wählt man, in der erwähnten Ebene, A als Anfangspunkt der Coordinaten x, y, sieht C als den Punkt an in welchem sich der Schwerpunkt des bewegten Körpers am Ende der Zeit t befindet, versteht unter α den Winkel welchen AB, unter φ den, welchen die Tangente in C, mit der horizontalen AX bildet, zerlegt dann v nach den Richtungen der Coordinaten-Achsen AX und AY in $v \operatorname{Cos} \varphi$ und $v \operatorname{Sin} \varphi$, ferner sämmtliche in diesem Augenblick wirkende Kräfte nach denselben Richtungen, bezeichnet die Summe der nach der Richtung AX, durch X, die Summe der nach der Richtung AY durch Y, das Gewicht des bewegten Körpers durch q, ferner die Beschleunigung nach der Richtung AX also $g\frac{X}{q}$ durch G' und die nach der Richtung AY, also $g\frac{Y}{q}$, durch G'' so hat man nach der allgemeinen Gleichung $\partial v_t = 2G$ hier

$$\partial(v \operatorname{Cos} \varphi)_t = 2G' \text{ und}$$
$$\partial(v \operatorname{Sin} \varphi)_t = 2G''.$$

Es ist aber $v = \partial s_t$ (§. 65.); $\operatorname{Cos} \varphi = \partial x_s$; $\operatorname{Sin} \varphi = \partial y_s$, also $v \operatorname{Cos} \varphi = \partial x_s \cdot \partial s_t = \partial x_t$ und $v \operatorname{Sin} \varphi = \partial y_s \cdot \partial s_t = \partial y_t$, und substituirt man diese Werthe, so hat man für alle solche Bewegungen die drei Grundgleichungen:

$$\text{(I.)} \quad \partial s_t = v$$
$$\text{(II.)} \quad \partial^2 x_t = 2G'$$
$$\text{(III.)} \quad \partial^2 y_t = 2G''.$$

Projicirt man G' und G'' auf die Tangente in C, und bezeichnet die Summe dieser Projectionen durch T, so hat man $T = G' \operatorname{Cos} \varphi + G'' \operatorname{Sin} \varphi$; es ist aber $\partial s_x^2 = 1 + \partial y_x^2$ (§. 46.) also auch $\partial s_t^2 = \partial x_t^2 + \partial y_t^2$ und hieraus $\partial s_t \cdot \partial^2 s_t = \partial x_t \cdot \partial^2 x_t + \partial y_t \; \partial^2 y_t$; also auch
$\partial^2 s_t = \partial x_s \cdot \partial^2 x_t + \partial y_s \cdot \partial^2 y_t = \partial^2 x_t \operatorname{Cos} \varphi + \partial^2 y_t \cdot \operatorname{Sin} \varphi$;

und substituirt man aus (II.) und (III.) so folgt:

$$\partial^2 s_t = 2[G' \mathrm{Cos}\varphi + G'' \mathrm{Sin}\varphi]$$

oder folgende, die Untersuchungen oft sehr erleichternde vierte Grundgleichung:

$$\text{(IV.)} \quad \partial^2 s_t = 2T.$$

Aus diesen Gleichungen und denen zu ihrer Herleitung benutzten Hülfsgleichungen sind nun in jedem besondern Fall, nach erfolgten Integrationen, die verlangten Relationen zu entnehmen. Die folgenden Paragraphen enthalten einige Anwendungen.

Liegen die Richtungen sämmtlicher stetig einwirkenden Kräfte nicht alle in einer Ebene mit AB, so wird im Allgemeinen die Bahn eine Curve doppelter Krümmung und die Bildung der erforderlichen Gleichungen findet sich auf denselben Weg, nur müssen die Zerlegungen nach drei Coordinaten-Achsen erfolgen.

§. 80.

Die Flugbahn ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft.

Dem Schwerpunkt A eines ruhenden Körpers (Fig. 21.) werde nach der Richtung AB, steigend unter dem spitzen Winkel α gegen den Horizont AX die Anfangsgeschwindigkeit c ertheilt. Die entstehende Bewegung zu bestimmen.

Es wirkt hier während der Bewegung nur allein die als constant zu betrachtende Schwere, und daher ist $X = 0$; $Y = -$ dem Gewicht des Körpers; folglich $G' = 0$; $G'' = -g$ und daher die drei Gleichungen $\partial s_t = v$; $\partial^2 x_t = 0$; $\partial^2 y_t = -2g$. Aus der zweiten folgt $\partial x_t = \text{Constant} = A$ oder $\partial x_s \cdot \partial s_t$, d. h. $\mathrm{Cos}\varphi \cdot v = A$; also

1. $v \mathrm{Cos}\varphi = c \mathrm{Cos}\alpha$ und daher
   $\partial x_t = c \mathrm{Cos}\alpha$ woraus
   $x = ct \mathrm{Cos}\alpha + \text{Const};$
   folglich, weil für $t = 0$ auch $x = 0$ wird,
2. $x = ct \mathrm{Cos}\alpha$ hervorgeht.

Aus der dritten entsteht
$\partial y_t = -2gt + Const$, oder $\partial y_s \cdot \partial s_t$ d. h.
$v Sin\varphi = -2gt + Const$, also weil für $t = 0$, $v = c$ und $\varphi = \alpha$ ist, $Const = c Sin\alpha$, daher

$$\partial y_t = -2gt + c Sin\alpha$$

und hieraus da t und y zugleich verschwinden,

3. $y = ct Sin\alpha - gt^2$.

Eliminirt man nun t aus 2 und 3, so folgt

$$y = x tg\alpha - \frac{g}{c^2 Cos^2\alpha} \cdot x^2$$

woraus erhellet, daß die Flugbahn, ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft, eine Parabel ist. (§. 50.)

Nun folgt auch

$$tg\varphi = \partial y_x = tg\alpha - \frac{2gx}{c^2 Cos^2\alpha} = tg\alpha - \frac{2gt}{c Cos\alpha};$$

dann aus 1.

$$v = c Cos\alpha Sec\varphi = \sqrt{c^2 + 4g^2t^2 - 4gct Sin\alpha}$$ und

$$s = \frac{c^2 Cos^2\alpha}{g}\left[tg\alpha Sec^2\alpha - tg\varphi Sec^2\varphi + \ln\frac{tg\alpha + Sec\alpha}{tg\varphi + Sec\varphi}\right]$$

unter φ den Winkel verstanden, dessen Tangente schon durch t ausgedrückt ist.

Ferner ergiebt sich leicht:

die Wurfweite $AD = \frac{c^2}{2g} Sin 2\alpha$;

die größte Wurfhöhe $EF = \frac{c^2}{4g} Sin^2\alpha$;

die Zeit des ganzen Wurfs $= \frac{c Sin\alpha}{g}$

u. s. w.

§. 81.

Die Flugbahn mit Rücksicht auf den Widerstand der Luft.

Mit Beibehaltung der Bedeutung der bisherigen Zeichen in §. 78 bis 80. ergeben sich sogleich die drei Grundgleichungen:

$$\partial s_t = v,$$
$$\partial^2 x_t = -2\mu v^2 \mathrm{Cos}\varphi,$$
$$\partial^2 y_t = -2g - 2\mu v^2 \mathrm{Sin}\varphi,$$

und wird in dieselben

$$\partial x_s = \frac{\partial x_t}{\partial s_t} = \frac{\partial x_t}{v} \text{ für } \mathrm{Cos}\varphi,$$

$$\partial y_s = \frac{\partial y_t}{v} \text{ für } \mathrm{Sin}\varphi$$

gesetzt, und dann v eliminirt, so bleiben die zwei Gleichungen:

$$\partial^2 x_t = -2\mu\, \partial s_t \cdot \partial x_t \text{ und}$$
$$\partial^2 y_t = -2g - 2\mu\, \partial s_t \cdot \partial y_t$$

oder, statt der letzteren, die

$$\partial^2 y_t = -2g + \frac{\partial^2 x_t}{\partial x_t}\partial y_t,$$

und es ist nur noch erforderlich aus beiden t zu eliminiren, um die Gleichung zwischen x und y, d. h. die verlangte Gleichung der Bahn zu erhalten. Führt man zu diesem Zweck x als die Urvariable ein, schreibt also

$$\frac{1}{\partial t_x} \text{ für } \partial x_t; \text{ daher}$$

$$-\frac{\partial(\partial t_x)_t}{\partial t_x^2} = -\frac{\partial^2 t_x}{\partial t_x^3} \text{ für } \partial^2 x_t; \text{ ferner}$$

$$\frac{\partial y_x}{\partial t_x} \text{ für } \partial y_t, \text{ also}$$

$$\frac{\partial t_x \cdot \partial(\partial y_x)_t - \partial y_x \cdot \partial(\partial t_x)_t}{\partial t_x^2} = \frac{\partial^2 y_x - \partial y_x\, \partial^2 t_x \cdot \frac{1}{\partial t_x}}{\partial t_x^2} \text{ für } \partial^2 y_t,$$

$$\frac{\partial s_x}{\partial t_x} \text{ für } \partial s_t \text{ und } \frac{\partial y_x}{\partial t_x} \text{ für } \partial y_t,$$

so gehen beide Gleichungen über in

$$\partial^2 t_x = 2\mu\,\partial s_x \cdot \partial t_x \text{ und}$$
$$\partial^2 y_x = -2g\,\partial t_x^2.$$

Die Elimination von t aus diesen beiden Gleichungen erfordert aber, weil ∂t_x und $\partial^2 t_x$ in ihnen vorkommt, noch eine dritte Gleichung, die aber keine höhere Ableitung von t nach x enthält, und diese entspringt aus der zweiten, wenn sie noch einmal nach x abgeleitet wird, wodurch

$$\partial^3 y_x = -4g\,\partial t_x \cdot \partial^2 t_x \text{ entsteht.}$$

Wird nun aus diesen drei Gleichungen ∂t_x und $\partial^2 t_x$ eliminirt, und zugleich $\sqrt{1+\partial y_x^2}$ für ∂s_x geschrieben, so ergiebt sich die Differenzial-Gleichung der dritten Ordnung

$$\partial^3 y_x = 4\mu\,\partial^2 y_x \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2},$$

welche, dreimal integrirt, die verlangte Coordinaten-Gleichung für die Curve, die der Schwerpunkt des Körpers durchläuft, geben wird, vorausgesetzt, daß die Verschiedenheit der Anziehungskraft unserer Erde bei so geringen Höhen als ohne Einfluß außer Betracht gelassen werden kann, und daß zugleich auch der Schwerpunkt des Körpers mit seinem Mittelpunkte (den Körper etwa als Kugel gedacht) zusammenfällt, damit nicht zugleich eine rotirende, also ablenkende Bewegung eintritt.

Um die erste Integration auszuführen, werde ∂y_x durch z ausgedrückt, so entsteht

$$\partial(\partial z_x)_x = 4\mu\,\partial z_x \cdot \sqrt{1+z^2}; \text{ also}$$

$$\partial z_x = \partial^2 y_x = 4\mu \int \sqrt{1+z^2}\,\partial z_x\,dx = 4\mu \int \sqrt{1+z^2}\,dz$$
$$= 2\mu\left[\partial y_x \cdot \sqrt{1+\partial y_x^2} + \ln\left[\partial y_x + \sqrt{1+\partial y_x^2}\right]\right] + C,$$

wo die Constante aus der Bedingung der Aufgabe zu entnehmen ist, daß für $x = 0$; $\partial y_x = \operatorname{tg}\varphi$ in $(\partial y_x)_0 = \operatorname{tg}\alpha$,

und $\partial^2 y_x = -2g\partial t^2_x = -\frac{2g}{\partial x_t^2} = -\frac{2g}{[\partial x_s \cdot \partial s_t]^2} = -\frac{2g}{(v \operatorname{Cos} \varphi)^2}$,

in $(\partial^2 y_x)_0 = -\frac{2g}{c^2 \operatorname{Cos}^2 \alpha}$ übergeht.

Die nun erforderliche zweite Integration ist in endlicher Form nicht auszuführen, nur annähernd durch Reihen, für kleine Werthe von α, und ist in meinen Anwendungen des höhern Calcüls (Leipzig bei Volkmar, 1836) Seite 163 u. s. w. zu finden.

IV.

Gezwungene Bewegung in einer ebenen Curve.

§. 82.

Herleitung der Grundgleichungen. Centrifugal-Kraft.

Wird einem festen Körper (etwa einer Kugel) nach irgend einer Richtung AB (Fig. 21.) eine Anfangsgeschwindigkeit C mitgetheilt, und bleibt alles genau wie in §. 79., so daß der Schwerpunkt die Curve ACF durchlaufen würde, ist aber die Kugel gezwungen, der vorgeschriebenen (etwa durch eine feste Schiene gebildeten und gegebenen) Curve AGN, für welche auch AB in A als Tangente vorausgesetzt wird, folgen zu müssen, so drückt dieselbe in jedem Augenblick gegen diese, den freien Lauf störende Curve, und dieser Normaldruck wird die Centrifugal-Kraft genannt. Wird nun vorausgesetzt, daß das physische Band (die Schiene) diesen Druck aushält, ohne nachzugeben, also in gleicher Stärke erwidert, welche gleiche Kraft die Centripetal-Kraft heißt, so kommt diese Kraft zu denen in §. 79. betrachteten noch hinzu, und es wird nicht nur die Bestimmung der Größe P derselben, zu Ende jeder Zeit t, sondern auch s und v als Function von t verlangt,

wenn die Gleichung $y = y_x$ zwischen den Coordinaten der Curve AGN als gegeben vorausgesetzt wird.

Wird die Ausdehnung der Kugel so klein angenommen, daß die Bahn ihres Mittelpunktes als mit der Curve AGN zusammenfallend anzusehen ist, und behalten alle Zeichen ihre Bedeutung wie in §. 79., so ist hier

$$G' = g\frac{X + P\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{q}\,; \quad G'' = g\frac{Y - P\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{q}$$

und bei dieser Bedeutung von G′ und G″ die drei Grundgleichungen:

$$\partial s_t = v\,,$$
$$\partial^2 x_t = 2G'\,,$$
$$\partial^2 y_t = 2G''\,;$$

woraus nach ausgeführter Integration für jeden Werth von t sowohl P als s und v als Functionen von t zu entnehmen sind. Die beiden folgenden Paragraphen enthalten einige Anwendungen.

§. 83.

Die Centrifugal-Kraft abgesondert, ohne Rücksicht auf Reibung.

Auf einer horizontalen festen Ebene ruhe in A (Fig. 21.) ein kleiner Körper vom Gewicht q und werde nach der Richtung AB mit der Anfangsgeschwindigkeit c in Bewegung gesetzt, sei aber gezwungen der Bahn AGN wider Willen folgen zu müssen; es sollen P, s, v als Functionen von t oder von dem zu t gehörigen Werth von x, so wie die Vergleichung zwischen t und x selbst, gefunden werden. Da die Ebene auf welcher die Bewegung erfolgt, horizontal und fest gedacht ist, so ist q mit der lothrechten Gegenwirkung dieser Ebene fortwährend im Gleichgewicht, so daß $X = 0$ und $Y = 0$, also auch $G' = g\frac{P\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{q}$ und $G'' = -g\frac{P\,\mathrm{Cos}\,\varphi}{q}$ ist, woraus $T = 0$ [§. 79. (IV.)], also

$\partial^2 s_t = \partial v_t = 0$; folglich
$\partial s_t = v = \text{Const} = c$
und hieraus $s = ct$, so wie auch $\partial s_x \cdot \partial x_t = c$ folgt.

Aus $\partial x_t = \frac{c}{\partial s_x}$ entsteht aber

$$\partial^2 x_t = -\frac{c^2 \partial^2 s_x}{\partial s_x^3} \text{ ; also weil}$$

$$\partial^2 x_t = 2G' = 2g \frac{P \operatorname{Sin} \varphi}{q} = \frac{2gP}{q} \cdot \partial y_s = \frac{2gP}{q} \cdot \frac{\partial y_x}{\partial s_x}$$

ist, aus der Gleichsetzung beider Werthe

$$P = -\frac{c^2 q}{2g} \cdot \frac{\partial^2 s_x}{\partial y_x \cdot \partial s_x^2},$$

oder, da $\partial s_x^2 = 1 + \partial y_x^2$, also $\partial s_x \cdot \partial^2 s_x = \partial y_x \cdot \partial^2 y_x$ ist,

$$P = -\frac{c^2 q}{2g} \cdot \frac{\partial^2 y_x}{\partial s_x^3} = -\frac{c^2 q}{2g} \cdot \frac{1}{\pm [1 + \partial y_x^2]^{\frac{3}{2}} : \partial^2 y_x}$$

folglich: weil P nicht negativ sein kann, wenn der Körper gezwungen ist der Bahn folgen zu müssen, und R den Halbmesser der Krümmung der Bahn an der zu x gehörigen Stelle derselben ausdrückt, nach §. 46.

$$P = \frac{c^2 \cdot q}{2gR}.$$

Man hat demnach unter M die Masse von q verstanden, so daß (nach §. 67.) 2gM für q zu setzen ist, folgende Resultate:

$v = c$,
$s = ct$,
$P = \frac{c^2 M}{R}$, und zur Vergleichung von t und x

$$t = \frac{1}{c} \int_{x \div 0} \sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot dx.$$

Es bleibt also die Geschwindigkeit unverändert dieselbe, daher ist die Bewegung gleichförmig und die Centrifugal-Kraft

wächst mit dem Quadrat der Geschwindigkeit und mit der Masse, steht aber im umgekehrten Verhältniß mit dem Halbmesser der Krümmung an der entsprechenden Stelle.

Für eine Kreisbahn ist R constant, und also auch P.

§. 84.

Vom Pendel.

Wird in eine vertiefte Fläche, an irgend eine Stelle derselben, nur nicht an die tiefste, ein schwerer Körper gelegt, so bewirkt die Schwere ein Fallen des Körpers auf der gezwungenen Bahn dieser Fläche, und ist dadurch der tiefste Punkt erreicht, so veranlaßt die hier erlangte Geschwindigkeit ein Aufwärtssteigen in dieser Fläche bis zu der Stelle, in welcher diese erlangte Geschwindigkeit als Anfangsgeschwindigkeit des Steigens zu Null geworden ist, worauf wieder ein Fallen erfolgt u. s. w. Eine solche Vorrichtung heißt ein Pendel und der einfachste Fall ist der: wenn an einer lothrechten Stange, die um einen ihrer Punkte drehbar ist, unterhalb desselben ein schwerer Körper befestigt und dann diese Stange aus der verticalen Lage gebracht wird, wo dann jeder Punkt derselben, so wie jeder Punkt des Gewichtes, gezwungen ist, wiederholt Kreisbogen zu beschreiben. So ein Pendel heißt zusammengesetzt, dann aber einfach, wenn die Stange oder der Faden als so dünn zu betrachten ist, daß die Masse desselben nicht in Rechnung zu bringen ist, das Gewicht aber als ein einzelner schwerer Atom angesehen werden kann. Es genüge hier die Theorie eines solchen einfachen Pendels.

Bezeichnet r die Länge des Fadens, q das Gewicht des an seinem Endpunkte befestigten Atoms, bildet der Faden in der erhobenen Lage, von welcher die Bewegung ausgeht, mit der Verticalen den Winkel α (Fig. 22.), nach Verlauf der Zeit t aber, in welcher der Bogen s durchlaufen und die Ge-

schwindigkeit v erlangt ist, den Winkel φ, und drückt P, im letzten Augenblick der Zeit t, die Anspannung des Fadens nach seiner Richtung, also auch die Gegenwirkung desselben aus, so ergeben sich in Beziehung auf die in der Figur angezeigten Coordinaten-Achsen X, Y die Gleichungen

$$\partial s_t = v; \quad \partial^2 x_t = 2g\frac{P\,\mathrm{Cos}\,\varphi - q}{q}; \quad \partial^2 y_t = -2g\frac{P\,\mathrm{Sin}\,\varphi}{q};$$

so wie auch $\partial^2 s_t = 2g\,\mathrm{Sin}\,\varphi$. Es ist aber

$$\partial^2 s_t = \partial v_t = v\,\partial v_s = v\cdot\frac{\partial v_\varphi}{\partial s_\varphi},$$

also, weil $s = r(\alpha - \varphi)$, und daher $\partial s_\varphi = -r$ ist,

$$\partial^2 s_t = -\frac{v\,\partial v_\varphi}{r},$$

und setzt man beide Werthe für $\partial^2 s_t$ einander gleich, so giebt die Integration sogleich

$$v^2 = 4gr\,\mathrm{Cos}\,\varphi + \mathrm{Const},$$

folglich, weil $v = 0$ ist, für $\varphi = \alpha$

$$v^2 = 4gr[\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha],$$

d. h. v ist gleich der der lothrechten Fallhöhe $r\,\mathrm{Cos}\,\varphi - r\,\mathrm{Cos}\,\alpha$ zugehörigen Geschwindigkeit, was auch unmittelbar aus §. 73. hervorgeht.

Nun folgt, aus

$$\partial s_t = \partial s_\varphi \cdot \partial \varphi_t = -r\cdot\partial\varphi_t = v, \text{ daß}$$

$$\partial t_\varphi = -\frac{r}{v} = -\sqrt{\frac{r}{4g}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha}}; \text{ also}$$

$$t = -\sqrt{\frac{r}{4g}}\cdot\int\frac{1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha}}\,d\varphi$$

ist, welches Integral in einen endlichen Ausdruck nicht anzugeben ist.

Benutzt man daher, zur annähernden Bestimmung, die Reihe §. 13. 2), so wird

$$\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha = \frac{1}{2}[\alpha^2 - \varphi^2] - \frac{1}{24}[\alpha^4 - \varphi^4] + \ldots :$$

und da für kleine Werthe von α, wenn der entsprechende Winkel 15 Grad nicht übersteigt, das zweite Glied dieser Reihe schon äußerst unbedeutend in Vergleich mit dem ersten ausfällt, so kann man in der ersten Annäherung blos $\frac{1}{2}(\alpha^2 - \varphi^2)$ für $\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha$ schreiben, und hat dann

$$t = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \int \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}}\, d\varphi\,,$$

woraus, nach §. 27. 3),

$$t = -\sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{\varphi}{\alpha} + C\,,$$

also, weil $t = 0$ ist, für $\varphi = \alpha$, $C = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \frac{\pi}{2}$ und demnach, $\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{\varphi}{\alpha}$ für $\frac{\pi}{2} - \mathrm{Arc\,Sin}\,\frac{\varphi}{\alpha}$ gesetzt,

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}} \cdot \mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{\varphi}{\alpha}$$ folgt.

Zur Ermittelung von P, aus den Gleichungen, folgt aus

$$\partial t_\varphi = -\sqrt{\frac{r}{4g}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha}}$$ sogleich

$$\partial \varphi_t = -2\sqrt{\frac{g}{r}} \cdot \sqrt{\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha}\,;$$ dann aus

$$x = r - r\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,;$$

$$\partial x_t = r\,\mathrm{Sin}\,\varphi \cdot \partial \varphi_t = -2\sqrt{gr} \cdot \mathrm{Sin}\,\varphi \cdot \sqrt{\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha}$$

und hieraus

$$\partial^2 x_t = 2g\,[2\,\mathrm{Cos}^2\varphi - \mathrm{Sin}^2\varphi - 2\,\mathrm{Cos}\,\alpha\,\mathrm{Cos}\,\varphi]$$

und wird dieser Werth dem $2g\frac{P\,\mathrm{Cos}\,\varphi - q}{q}$ gleich gesetzt, so folgt:

$$P = [3\,\mathrm{Cos}\,\varphi - 2\,\mathrm{Cos}\,\alpha]\cdot q\,,$$

oder, wenn aus der Gleichung $v^2 = 4gr(\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha)$; $\frac{v^2}{4gr}$ für $\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha$ eingeführt wird,

$$P = \frac{v^2 q}{2gr} + q\,\mathrm{Cos}\,\varphi\,,$$

welches Resultat aus der Zerlegung von q und aus §. 83. auch unmittelbarer und leichter hervorgeht.

Die Resultate der Auflösung sind demnach:

$$v^2 = 4gr(\mathrm{Cos}\,\varphi - \mathrm{Cos}\,\alpha)\,,$$

$$P = \frac{v^2 q}{2gr} + q\,\mathrm{Cos}\,\varphi$$ und das annähernde

$$t = \sqrt{\frac{r}{2g}}\,\mathrm{Arc\,Cos}\,\frac{\varphi}{\alpha}\,.$$

Aus Letzterem folgt, für $\varphi = 0$, $t = \frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{\frac{r}{2g}}$ und für $\varphi = -\alpha$, also für die Zeit T eines ganzen Schwunges

$$T = \pi\cdot\sqrt{\frac{r}{2g}}\,,$$

also unabhängig von φ, so daß, wenn α nur klein ist, jeder Schwung, wenn auch α immer kleiner werden sollte, doch immer dieselbe Zeitdauer erfordert. Wird r genau gemessen, T durch eine scharfe Beobachtung ermittelt, so geht dann aus der letzten Formel der in §. 66. für g angegebene Werth hervor.

Soll ein einfaches Pendel, wenn die Elevation α unter 15^0 ist, genau zu jedem Schwung eine Secunde gebrauchen, so muß

$$r = \frac{2g}{\pi^2}\,,$$

d. h. ziemlich genau die Länge von 3 Fuß 2 Zoll haben.

V.

Drehende Bewegung der Massen um feste Achsen. Moment der Trägheit.

§. 85.

Moment der Trägheit.

Auf einer horizontalen Ebene sei eine mathematische Linie AB, ohne alle Hindernisse, um A, als fest gedachten Punkt, drehbar, so daß, wenn diese Drehung eintritt, jeder Punkt dieser Linie (A ausgenommen) einen Kreisbogen in dieser Ebene beschreiben wird. In zwei Punkten C, D dieser Linie wird: entweder in dem einen C, ein Massen-Element m vom Gewicht q, oder in dem andern D ein Massen-Element m′ vom Gewicht q′ befestigt, so daß in jedem der beiden Fälle das angebrachte Gewicht von der fest gedachten, horizontalen Ebene getragen wird, also Druck und Gegendruck im Gleichgewicht sind. Wenn nun in irgend einem andern Punkt E dieser (ohne Masse und ohne Gewicht zu denkenden) Linie AB, horizontal eine stetige Kraft P normal auf AB wirkt und Drehung um A hervorruft, so soll diejenige Relation zwischen AC, AD, q und q′ (oder m und m′) ermittelt werden, für welche die Linie AB denselben Winkel φ in irgend einer Zeit t beschreibt, mag m in C oder m′ in D angebracht sein, und zwar erstens ohne Rücksicht auf den Widerstand der Reibung auf der Ebene; zweitens mit Rücksicht auf denselben.

1. Wird AC durch a, AD durch a′ und AE durch b bezeichnet, so ist, wenn nur m in C angebracht ist, jede Einwirkung von P auf C reducirt, $= \frac{Pb}{a}$ und also, in Beziehung auf die stetige Einwirkung von $\frac{Pb}{a}$ auf die Masse m vom Gewicht q, die entsprechende Beschleuni-

gung $= g\frac{Pb}{aq} = T$ (§. 79.), daher $\partial^2 s_t = 2T$ woraus, weil t und s zugleich anfangen

$$s = T \cdot t^2 = g\frac{Pb}{aq} \cdot t^2 \text{ folgt.}$$

Ist aber, nur m' in D angebracht, so folgt, wenn s' den zu t gehörigen, von D beschriebenen, Kreisbogen bezeichnet, eben so:

$$s' = g\frac{Pb}{a'q'} \cdot t^2 .$$

Weil nun beide Kreisbogen s und s' denselben Winkel φ entsprechen sollen, d. h. weil in beiden Fällen, mag m in C oder m' in D angebracht sein, dieselbe Winkelgeschwindigkeit gleichzeitig stattfinden soll, so entsteht, wenn in die erste Gleichung $a\varphi$ für s, in die zweite $a'\varphi$ für s' gesetzt, jedesmal φ entwickelt, und beide Resultate gleichgesetzt werden, die Bedingungs-Gleichung:

$$a^2 q = a'^2 \cdot q'$$

oder auch nach §. 67.

$$a^2 \cdot m = a'^2 \cdot m' .$$

Diese Produkte $a^2 m$, $a'^2 \cdot m'$ nennt man Trägheits-Momente, und es ist also für die entstehende Drehung ganz einerlei ob eine Masse m in der Entfernung a oder eine andere Masse m' in der Enfernung a' von der Drehachse (oder hier den Drehpunkt) angebracht wird, wenn nur die Trägheits-Momente beider Massen einander gleich sind. Ist daher eine Masse m in der Entfernung a von der Drehachse, vorhanden, so kann man dafür in der gegebenen Entfernung b von derselben eine andere (gesuchte) Masse x sich angebracht denken, wenn man nur $x = \frac{a^2 m}{b^2}$ nimmt, und man nennt dieß: (eben so wie in der Statik bei den Kräften) das Reduciren eines Massen-Elements aus einem Punkt auf einen andern.

2. Mit Rücksicht auf den Reibungs-Widerstand ergiebt sich eben so:

$$s = a\varphi = g\,\frac{\frac{Pb}{a} - \mu q}{q}\,t^2$$

$$s' = a'\varphi = g\,\frac{\frac{Pb}{a'} - \mu q'}{q'}\cdot t^2$$

und dann aus der Gleichsetzung der beiden für φ sich ergebenden Werthe die Bedingungs-Gleichung:

$$a^2 q - a'^2 \cdot q' = \frac{\mu a a' q q'}{Pb}[a - a']$$

welche nur in dem Fall, wenn $\mu = 0$ ist, in die $a^2 m = a'^2 m'$ übergeht, für jeden Zahlenwerth von μ aber eine ganz andere Bedingung ausdrückt, woraus erhellet, daß das in 1, erwähnte Reduciren einer Masse nur in dem Fall gebraucht werden darf, wo aus dem Gewicht dieser Masse kein Reibungswiderstand entspringt.

§. 86.

Bestimmung des Momentes der Trägheit eines Körpers in Beziehung auf eine gegebene Drehachse.

Bezeichnet m ein Massen-Element des Körpers und befindet sich dasselbe in der Entfernung r von der Drehachse, so daß das Moment der Trägheit desselben $= m \cdot r^2$ oder, wenn man lieber mit Gewichten rechnet, $= q \cdot r^2$ ist, unter q das Gewicht dieses Elements verstanden, so ist die Summe aller dieser Producte für sämmtliche im ganzen Körper vertheilten Massen-Elemente, wobei, im Allgemeinen, r für jedes Element einen andern Werth hat, gleich dem Moment der Trägheit des ganzen Körpers, und dasselbe daher durch $\Sigma\,(q \cdot r^2)$ ausgedrückt. Um nun diese Summe zu bestimmen, wähle man

drei auf einander normale Coordinaten-Achsen X, Y, Z, die eine derselben aber, etwa Z, mit der Drehachse zusammenfallend, und denke sich, wenn $F_{x,y,z} = 0$ die gegebene Gleichung für die den Körper begrenzende Fläche ist, unter z' einen veränderlichen Theil von z und unter p das Gewicht eines Cubicfußes der Materie des Körpers, so ist für das Massen-Element vom Inhalt $dx \cdot dy \cdot dz'$ und vom Gewicht $p \cdot dx \cdot dy \cdot dz'$, das Quadrat der Entfernung desselben von der Drehachse oder von Z, gleich $x^2 + y^2$; folglich

$$p \cdot dx \cdot dy \cdot \Sigma[(x^2 + y^2) dz'] \text{ oder}$$
$$p \cdot dx \cdot dy (x^2 + y^2) \int 1 \cdot dz'$$

zwischen den Grenzen nach z genommen, welche die Gestalt oder Begränzungsfläche des Körpers bestimmt, das Moment der Trägheit des mit Z parallelen Stäbchens oder Prismas vom Querschnitt $dx \cdot dy$; dann ist

$$p dx \cdot \Sigma[(x^2 + y^2) dy \cdot \int dz'] \text{ oder}$$
$$p dx \cdot \int (x^2 + y^2)(\int dz') dy$$

zwischen denen durch die Form des Körpers bestimmten constanten oder veränderlichen Grenzwerthen von y genommen, das Moment der Trägheit der Schicht im Körper von der Dicke dx, welche in der constant gedachten Entfernung x parallel mit der Ebene YZ liegt, und endlich

$$p \cdot \Sigma[\int [(x^2 + y^2) \cdot (\int dz') dy] \cdot dx] \text{ oder}$$
$$p \int [\int [(x^2 + y^2)(\int dz') dy] dx],$$

ebenfalls zwischen den erforderlichen Grenzen von x genommen, oder kürzer durch einen Wiederholungs-Exponenten ausgedrückt

$$\int^3 (x^2 + y^2) dz' dy dx$$

das verlangte Moment der Trägheit des ganzen Körpers. Für manche Körper insbesondere für Umdrehungskörper, wenn das Moment ihrer Trägheit in Beziehung auf die Achse bestimmt werden soll, um welche sich die Ebene, die den Körper erzeugte, gedreht hat, ist es bequemer, denselben als aus lauter

materiellen Cylindermänteln, dieser Achse zugehörig, bestehend zu betrachten. In andern Fällen kann es Erleichterung gewähren den Körper als eine Summe oder Differenz zweier oder mehrer andern zu betrachten. Eine allgemeine Erleichterung enthält der folgende Paragraph.

§. 87.

Lehrsatz.

Bezeichnet W das, als gefunden vorausgesetzte, Moment der Trägheit eines Körpers, dessen Gewicht = Q ist, in Beziehung auf eine Drehachse Z die durch den Schwerpunkt dieses Körpers geht, so ist für jede in der Entfernung a mit Z parallele Drehachse Z′, das Moment der Trägheit W′ desselben Körpers $= W + Qa^2$.

Beweis. Wählt man den Anfangspunkt 0 der Coordinaten beliebig in Z, die Coordinaten-Achse X in der Ebene durch Z und Z′ und bezeichnet das Gewicht jedes Massen-Elements durch q, so daß also $\Sigma(q) = Q$ und nach der Lehre vom Schwerpunkt $\Sigma(qx) = 0$ ist, weil der Schwerpunkt des Körpers in Z liegt, so hat man $W = \Sigma[q(x^2 + y^2)]$ und wenn a und x von 0 ab, in einerlei Richtung genommen, vorausgesetzt werden,

$$W' = \Sigma[q[(\pm a \mp x)^2 + y^2]]$$
$$= \Sigma[q(x^2 + y^2)] + a^2\Sigma(q) - 2a\Sigma(qx)$$

oder

$$W' = W + a^2 Q.$$

Beispiele, in welchen sämmtlich das Gewicht eines Cubikfußes der Materie des Körpers, als Eins angenommen und das Volumen durch V ausgedrückt ist, so daß also V auch zugleich das Gewicht bezeichnet.

1. Das Moment der Trägheit W′ eines normalen Parallelepipedums von den Abmessungen 2a, 2b und 2c in

Beziehung auf eine Drehachse zu bestimmen, welche in der Entfernung d mit der Kante 2c parallel läuft.

Denkt man sich durch den Schwerpunkt des als homogen angesehenen Körpers eine Drehachse parallel mit 2c und durch den Schwerpunkt parallele Ebenen mit den Seiten-Ebenen des Körpers gelegt, so theilen sie denselben in acht congruente Theile, jeden von den Abmessungen a, b, c und für jeden dieser Theile ist, a, b, c als die Coordinaten-Achsen X, Y, Z gewählt, in Beziehung auf die Kante c als Drehachse, das Moment der Trägheit

$$= \int_{a \div o}\left[\int_{b \div o}[(x^2 + y^2)\int_{c \div o} 1 \cdot dz'] \, dy\right] dx$$
$$= \frac{abc}{3}(a^2 + b^2),$$

also das des ganzen Körpers

$$= V \cdot \frac{a^2 + b^2}{3}; \text{ und daher}$$

$$W' = V \cdot \left[\frac{a^2 + b^2}{3} + d^2\right].$$

2. Das Moment der Trägheit eines normalen Cylinders von den Abmessungen r, h in Beziehung auf seine Achse h als Drehachse, entsteht, wenn x einen veränderlichen Theil von r bezeichnet

$$W = \int_{r \div o} 2\pi x \cdot h x^2 \, dx = V \cdot \frac{r^2}{2},$$

so daß man sich also die Hälfte der Masse im Mantel des Cylinders vorstellen kann.

Ist der Cylinder hohl, der Halbmesser der Höhlung $= \varrho$, so wird $W = \frac{1}{2}\pi h[r^4 - \varrho^4]$.

3. Für einen normalen Kegel von den Abmessungen r, h

in Beziehung auf seine Achse h als Drehachse, findet sich eben so

$$W = V \cdot \frac{3}{10} r^2.$$

4. Für eine Kugel zum Halbmesser r in Beziehung auf einen ihrer Durchmesser als Drehachse ergiebt sich

$$W = V \cdot \frac{2}{5} r^2.$$

VI.

Von der Größe der Bewegung oder dem Stoß, wenn alle Elemente einer Masse in parallelen Richtungen gleichzeitig einerlei Geschwindigkeit haben.

§. 88.

Begriff des Wortes: Stoß.

Wird ein Körper durch eine Kraft p (etwa sein eigenes Gewicht) welche durch seinen Schwerpunkt gerichtet ist, oder durch gleiche Kräfte deren Summe = p ist, in allen seinen Atomen vertheilt, und nach derselben Richtung wirkend, ergriffen, und ein Widerstand vernichtet das Beginnen der durch diese Kraft beabsichtigten Bewegung dieses Körpers, so nannten wir die Einwirkung so wie die ihr gleiche Gegenwirkung den Druck; ist aber der Körper schon in Bewegung und haben alle Atome desselben, also auch der Schwerpunkt in einerlei Richtung, eine und dieselbe Geschwindigkeit, und tritt nun dieser Körper mit schon begonnener Bewegung, einen Widerstand welcher diese Bewegung ganz oder zum Theil aufhebt, so wird diese Wirkung der Stoß genannt. Für den

Druck wurde das Pfund als Einheit gewählt; von der Einheit für den Stoß handelt der folgende Paragraph.

§. 89.

Feststellung der Einheit für den Stoß.

Haben zu Ende irgend einer Zeit t, also während der Zeit dt alle Atome einer Masse, nach parallelen Richtungen einerlei Geschwindigkeit v, und bezeichnet p den Stoß welcher jedem Atom, wenn er ruhend wäre, durch einmalige Einwirkung diese Geschwindigkeit v ertheilen, oder entgegengesetzt angebracht, sie vernichten würde, wenn sie schon statt findet, so drückt p zugleich die Wirkung oder den Stoß aus, welchen der Atom auf einen festen Widerstand ausüben wird. Bezeichnet nun M die Masse und n die Anzahl der Atome in der Massen-Einheit, so ist Mnp der Stoß oder die Größe der Bewegung der ganzen Masse M, also wenn dieser Stoß durch P ausgedrückt wird, $P = Mnp$. Beziehen sich nun M', p', v', P' eben so auf einander, wie M, p, v, P; so ist ebenfalls $P' = M' \cdot n \cdot p'$ und folglich $P : P' = Mp : M'p'$. Es ist aber v' eben so die Wirkung der Ursache p' wie v die Wirkung der Ursache oder Kraft p unter durchaus gleichen Umständen ist, folglich da die Wirkungen den einzigen Maßstab für die Ursachen geben, $p : p' = v : v'$ und obige Proportion wird daher folgende:

$$P : P' = Mv : M'v',$$

oder auch wenn q, q' die Gewichte der Massen M, M' ausdrücken, so daß $q = 2gM$; $q' = 2gM'$ ist,

$$P : P' = qv : q'v'.$$

Wählt man nun den Stoß P' als Einheit welchen eine Masse $M' = 1$ mit der Geschwindigkeit $v' = 1$ (ein Fuß) ausübt, so hat man $P = Mv$ solche Stoß-Einheiten; wird aber der Stoß P' als Einheit gewählt welchen eine Masse M' deren Gewicht $q' = 1$ (ein Pfund) und deren Geschwindigkeit $v' = 1$

ist, ausübt, so hat man P = qv solche Stoß-Einheiten, welche Einheit füglich ein Stoß-Pfund genannt werden kann. Wird letztere Einheit, als bequemer für die Rechnung, beibehalten, so ist dann für eine Masse M vom Gewicht q, wenn alle ihre Atome in einerlei Richtung die Geschwindigkeit v haben, in Stoßpfunden verstanden, qv die Größe der Bewegung oder der Stoß, welchen diese Masse auf einen Widerstand ausüben wird, oder: die Kraft als Stoß welche im Schwerpunkt dieser Masse, wenn sie in Ruhe wäre, nach derselben Richtung angebracht werden müßte, um derselben augenblicklich, d. h. durch einmaliges Einwirken diese Geschwindigkeit v mitzutheilen, oder auch: die Kraft als Stoß welche dieser mit der Geschwindigkeit v ankommenden Masse in ihren Schwerpunkt, direkt entgegengesetzt werden müßte, um augenblicklich diese Bewegung zu vernichten. Befremden kann es allerdings den Anfänger, wenn z. B. bei der Bewegung einer Masse auf einer horizontalen Ebene, wo das Gewicht derselben in jedem Augenblick durch den Widerstand der Ebene aufgehoben, also als gar nicht existirend anzusehen ist, dennoch dasselbe als die Größe des Stoßes mit bestimmend erscheint, obgleich nicht dieß Gewicht, sondern nur die Menge der in Bewegung befindlichen Atome, d. h. die Masse die Mitursache ist, und in dieser Hinsicht der Stoß bezeichnender durch Mv ausgedrückt wäre. Berücksichtigt man aber, daß beim Gebrauch des Ausdrucks qv, der Factor q nur als Mittel zu Bestimmung des Stoßes nicht als die Ursache selbst zu betrachten ist, so verschwindet, was befremden konnte.

Für Untersuchungen in Beziehung auf die allgemeine Attraktionskraft der Himmelskörper unter einander ist es übrigens bequemer mit Massen, für Untersuchungen bei Kräften auf der Oberfläche unserer Erde aber, mit Pfunden zu rechnen.

Das mechanische Moment (so wie es in der Statik beim Prinzip von den virtuellen Geschwindigkeiten als das Product

aus der Kraft in die augenblickliche Geschwindigkeit des von ihr ergriffenen Punktes, eingeführt ist) eines Stoßes qv, also das Product qv^2 wird die lebendige Kraft dieses Stoßes von der Masse M und dem Gewicht q für den Augenblick wo die Geschwindigkeit $= v$ ist, genannt.

§. 90.

Vergleichung von Druck und Stoß.

Wird ein Körper von der Masse M und dem Gewicht q durch eine Kraft von p Pfunden gegen eine feste lothrechte Wand gedrückt, so wird, wenn (was wohl auch in der Regel eintritt) die Wand auch nur um unendlich wenig nachgiebt, also einen Eindruck erleidet, und diese Zurückweichung in Erfolg der ersten Wirkung von p durch dv bezeichnet wird, der Druck p als ein Stoß erscheinen, und daher auch $= Mdv$ Stoßeinheiten, oder $= q \cdot dv$ Stoßpfund zu setzen sein. Wenn daher, der Kürze wegen ein Druckpfund durch H, die Stoßeinheit, wenn mit Massen gerechnet wird, durch Σ, das Stoßpfund aber durch Π ausgedrückt wird, so hat man $pH = Mdv\Sigma$ oder $= qdv\Pi$; oder nach §. 66., $2Gdt$ für dv und $g\frac{p}{q}$ für G gesetzt $pH = M \cdot 2g\frac{p}{q}dt\Sigma$; oder $= q \cdot 2g\frac{p}{q}dt\Pi$, also weil $2gM = q$ ist, (§. 67.) $pH = pdt\Sigma$ oder $= 2gpdt\Pi$ woraus, wenn mit p dividirt ist, folgt:

$$H : \Sigma = dt : 1 \text{ so wie auch}$$
$$H : \Pi = 2gdt : 1.$$

Es geht hieraus hervor daß Druck und Stoß in endlichen Zahlen nie vergleichbar sind und daß jeder Druck in Vergleich zu einem Stoß unendlich klein ist. In der Wirklichkeit findet übrigens kein Druck statt, welchem nicht ein Stoß vorangeht, und jeder Stoß, wenn er auch noch so kurze Zeit dauert, geht

in einen Druck über. Wenn daher eine bewegende Kraft oder ein Druck, z. B. das Gewicht q einer Masse M, auf eine andere Masse M′ vom Gewicht q′ wirkt, so betrachtet man, um alle Kräfte, sowohl die hervorbringenden, als die hervorgebrachten, in derselben Einheit ausgedrückt zu erhalten, den Druck als eine unendlich kleine Größe der Bewegung, d. h. als einen unendlich kleinen Stoß, nimmt also nicht den Druck q sondern den Stoß qdv und drückt nun alles in der Stoßeinheit aus, oder umgekehrt. Wäre z. B. das Gewicht q′ der Masse M′ durch irgend eine Gegenwirkung fortdauernd aufgehoben, und man legte auf diese Masse (mit der Geschwindigkeit 0, wenn es möglich wäre) die Masse M vom Gewicht q, so wäre, alles in der Stoßeinheit ausgedrückt (nach §. 68.) $G = g\frac{qdv}{qdv + q'dv} = g\frac{q}{q + q'}$ was dasselbe ist, als hätte man gleich alles in der Druckeinheit genommen. Statt $\frac{q}{q + q'}$ kann auch $\frac{M}{M + M'}$ gesetzt werden.

§. 91.

Zwei Lehrsätze.

1. Wirken auf zwei verschiedene ruhende Massen von den Gewichten q, q′ gleiche constante Kräfte, jede = p, stetig in bleibender Richtung, so sind zu Ende einer und derselben Zeit t die Größen der Bewegung oder die Stöße derselben einander gleich.

Hat q am Ende der Zeit t die Geschwindigkeit v; q′ die v′ erlangt, so folgt nach §. 69.

$$v = 2g\frac{p}{q}t \text{ und } v' = 2g\frac{p}{q'}\cdot t$$

und aus beiden Gleichungen geht

$$qv = q'v' \text{ sogleich hervor.}$$

2. Wirken auf zwei verschiedene ruhende Massen von den Gewichten q, q' gleiche constante Kräfte, jede $= p$ so sind nach Durchlaufung gleicher Wege s, die lebendigen Kräfte derselben einander gleich.

Hat q nach Durchlaufung des Wegs s, die Geschwindigkeit c; q' die c' erlangt, so ist nach §. 69.

$$c^2 = 4g\frac{p}{q}s \text{ und } c'^2 = 4g\frac{p}{q'}s \text{ woraus}$$
$$c^2 q = c'^2 \cdot q' \text{ folgt.}$$

§. 92.

Centralstoß zweier Kugeln.

Erstens für den Fall, wenn die Materien beider unelastisch oder vollkommen hart sind, also durch den Stoß ihre Gestalt nicht ändern.

Hat die eine Kugel die Geschwindigkeit v und ist ihre Masse $= M$, ihr Gewicht $= q$; und bezeichnen bei der andern v', M', q' dasselbe, so ist die Summe der Bewegungsvermögen beider $qv + q'v'$. Ist nun v' größer als v, so dauert die Einwirkung der Masse M' auf die M so lange bis beide einerlei Geschwindigkeit x haben; an Bewegungsvermögen geht aber Nichts verloren, denn was M' verliert, gewinnt M. Es ist also das Bewegungsvermögen nach dem Stoß $= (q + q')x$ noch eben so groß, als die Summe der Bewegungsvermögen beider Massen, vor dem Stoß, und aus der Gleichsetzung folgt

$$x = \frac{qv + q'v'}{q + q'} \text{ oder } x = \frac{Mv + M'v'}{M + M'}.$$

Ruht M, ist also $v = 0$; so ist $x = \dfrac{q'v'}{q + q'}$. Hat M direkt entgegengesetzt, die Geschwindigkeit v, so wird

$$x = \frac{M'v' - Mv}{M' + M}.$$

Zweitens für den Fall wenn die Materien beider vollkommen elastisch sind, also ihre durch den Stoß verlorene Form augenblicklich mit derselben Gewalt wieder herstellen, welche erforderlich war, sie zu ändern.

Bei derselben Bedeutung der Zeichen haben nach beendigter Einwirkung, ehe die Gegenwirkung durch Wiederherstellung der Form beginnt, beide Massen die Geschwindigkeit $x = \frac{q'v' + qv}{q' + q}$, und M' hat also an Geschwindigkeit verloren $v' - x$; M gewonnen $x - v$; durch Wiederherstellung der Gestalt von M verliert M' abermals $v' - x$ und durch Erneuerung der Gestalt von M' gewinnt M noch einmal $x - v$, und es ist daher nach Beendigung der Wirkung und Gegenwirkung, die verlangte Geschwindigkeit von M' gleich y und die von M gleich z gesetzt, $y = v' - 2(v' - x)$; $z = v + 2(x - v)$ oder, den Werth für x substituirt,

$$y = \frac{M'v' + M(2v - v')}{M' + M};$$

$$z = \frac{Mv + M'(2v' - v)}{M' + M}.$$

Ruht M, ist also $v = 0$; so entsteht

$$y = \frac{M' - M}{M' + M} v'; \quad z = \frac{2M'v'}{M' + M};$$

und wenn $M' = M$ ist, $y = 0$; $z = v'$.

Hat M die Geschwindigkeit v direkt entgegengesetzt, so wird

$$y = \frac{M'v' - M(2v + v')}{M' + M};$$

$$z = \frac{-Mv + M'(2v' + v)}{M' + M}$$

und ist $M = M'$, so folgt

$$y = -v; \; z = v'.$$

Aus den allgemeinen Formeln für y und z geht auch noch hervor:

$$z - y = v' - v;$$

d. h. die Differenz der Geschwindigkeiten bleibt unverändert; und

$$M'y^2 + Mz^2 = M'v'^2 + Mv^2;$$

d. h. die Summe der lebendigen Kräfte ist vor dem Stoß so groß wie nach dem Stoß.

VII.

Allgemeines Gesetz für die Bewegung fester Körper.

§. 93.

Das d'Alembertsche Prinzip.

Hat eine Masse M vom Gewicht q durch stetige Einwirkung von gleichen Kräften, in allen ihren Atomen nach parallelen Richtungen, oder durch die Summe dieser Kräfte im Schwerpunkt von M nach derselben Richtung wirkend, zu Ende irgend einer Zeit t die Geschwindigkeit v erlangt, so drückt dv den Zuwachs an Geschwindigkeit im folgenden Augenblick dt aus, und es ist, wenn p die Kraft bezeichnet, welche wenn M in Ruhe wäre, durch einmaliges Wirken, also in der Zeit dt, diese Geschwindigkeit dv als Anfangsgeschwindigkeit hervorrufen würde (nach §. 66. und 68.)

$$dv = 2g\frac{p}{q}dt, \text{ also } p = \frac{q}{2g}\partial v_t = M\partial v_t\,.$$

Würde also vom Ende der Zeit t ab, dieser Masse M, die Kraft $p = M\partial v_t$, stetig im Schwerpunkt derselben wirkend, direkt entgegengesetzt, so würde die zu Ende der Zeit t bestehende Geschwindigkeit v nicht weiter anwachsen, also die Bewegung von diesem Augenblick an, in eine constante übergehen.

Sind daher mehrere Massen-Elemente m, m′, m″ u. s. w. in einem losen oder festen System in Verbindung, wirken stetige Kräfte auf das ganze System und haben diese Elemente zu Ende der Zeit t die Geschwindigkeiten v, v′, v″ ...., so wird, wenn in jedem derselben beziehlich nun die Kräfte $m\partial v_t$, $m'\partial v'_t$, $m''\partial v''_t$ .... der bestehenden Bewegung direkt entgegengesetzt angebracht werden, die Bewegung keine fernere Aenderung erleiden, also die Geschwindigkeiten v, v′, v″ .... unverändert bleiben, d. h. es wird dadurch, daß man diese Kräfte $m\partial v_t$, $m'\partial v'_t$, $m''\partial v''_t$ ...., welche die verlorenen Kräfte genannt werden, sich am Ende der Zeit t, als entgegengesetzt thätig hinzu denkt, ein Gleichgewicht zwischen allen Kräften eintreten. Diese von d'Alembert aufgestellte Ansicht reducirt die Auflösung aller Aufgaben der Mechanik auf die einfachen Gesetze der Statik, und ist somit als das Grund-Prinzip der Mechanik anzusehen, wodurch alle Aufgaben derselben (also auch die bisherigen) auf dem kürzesten Wege ihre Auflösung finden. Aus diesen statischen Gleichungen ergeben sich dann auch, außer den Vergleichungen zwischen s, t und v für jeden Punkt des Systems, noch die Drucke in demselben, so wie sie am Ende der gewählten Zeit t sich äußern. Die folgenden Aufgaben enthalten einige Anwendungen dieses d'Alembertschen Prinzips.

§. 94.

Aufgabe.

Eine Welle (normaler Cylinder) von durchaus homogener Materie ist um ihre horizontale feste Achse (als mathematische Linie gedacht) ohne alle Hindernisse drehbar. Am Endpunkt B ihres horizontalen Durchmessers AB (Fig. 23.) hänge an einem um die Welle gelegten Faden, der ohne Dicke und gewichtlos gedacht ist, ein Gewicht q lothrecht herab, und erzeuge drehende Bewegung der Welle um ihre festgehaltene Achse. Die Ge-

setze der entstehenden Bewegung, so wie auch den Druck auf die Achse und seine Richtung zu jeder Zeit zu bestimmen.

Bezeichnet r den Halbmesser der Welle; a ihre Länge, W ihr Gewicht; w das Gewicht jeder Cubic-Einheit ihrer Materie; y den Druck auf die Achse, also auch den Gegendruck der sie haltenden Kraft; z den Winkel ihrer Richtung mit dem Horizont; und denkt man sich, dem Polar-Winkel φ und dem Radius-Vektor x zugehörig, ein Element der Welle, vom Querschnitt $dx \cdot x d\varphi$ und der Länge a, so würde, wenn nach Verlauf von t Secunden, der Faden die Geschwindigkeit v erlangt und den Weg s durchlaufen hat, in diesem Augenblick das erwähnte Element die Geschwindigkeit $\frac{x}{r} \cdot v$ besitzen, also in dem folgenden Augenblick dt eine Kraft p gewinnen, welche sich aus der Gleichung

$$\frac{x}{r} dv = 2g \frac{p}{dx \cdot x d\varphi \cdot a \cdot w} dt$$

bestimmt, nämlich

$$p = \frac{aw}{2gr} \cdot \partial v_t \cdot x^2 \cdot dx \cdot d\varphi \ .$$

Vernichtet man nun diesen Kraftzuwachs vor Beginn der Zeit dt, bringt also, entgegengesetzt, die verlorene Kraft p an und vernichtet eben so den Kraftzuwachs von q, nämlich $\frac{q}{2g} \partial v_t$ durch fingirte Anbringung dieser Kraft in der entgegengesetzten Richtung, so sind am Ende der Zeit t, also vor Beginn des Augenblicks dt, folgende Kräfte $\Sigma(p)$, $q - \frac{q}{2g} \partial v_t$, W, und y im Gleichgewicht.

Projcirt man dieselben dann auf die horizontale Achse AB und auf die vertikale, so entstehen, nach den drei Gleichgewichts-Bedingungen für Kräfte in einer Ebene, die Gleichungen:

1) $\Sigma(p \operatorname{Sin} \varphi) + y \operatorname{Cos} z = 0$;

2) $\Sigma(p \operatorname{Cos} \varphi) + W + q - \frac{q}{2g} \partial v_t - y \operatorname{Sin} z = 0$; und

3) $\Sigma[px] - \left[q - \frac{q}{2g} \partial v_t\right] r = 0$,

wenn, bei jedem Summen-Zeichen Σ, die Summe verstanden wird, welche die Aufgabe bestimmt, nämlich zwischen den Grenzen r und 0 nach x, und zwischen den Grenzen 2π und 0 nach φ. Hiernach wird (nach §. 33.)

$$\Sigma[p \operatorname{Sin} \varphi] = \frac{aw}{2gr} \partial v_t \int_{r \div 0} x^2 \left[\int_{2\pi \div 0} \operatorname{Sin} \varphi \, d\varphi\right] dx,$$

also, weil $\int \operatorname{Sin} \varphi \, d\varphi = \operatorname{Cos} \varphi$, daher

$\int_{2\pi \div 0} \operatorname{Sin} \varphi \, d\varphi = 1 - 1 = 0$ ist,

$\Sigma[p \operatorname{Sin} \varphi] = 0$; eben so

$\Sigma[p \operatorname{Cos} \varphi] = 0$ und

$$\Sigma[px] = \frac{aw}{2gr} \partial v_t \int_{r \div 0} \left[\int_{2\pi \div 0} d\varphi\right] x^3 dx = \frac{aw\pi}{gr} \partial v_t \cdot \frac{r^4}{4}$$

$$= \frac{W}{4g} r \cdot \partial v_t .$$

Substituirt man diese Werthe, so gehen obige drei Gleichungen über in

$y \operatorname{Cos} z = 0$;

$W + q - \frac{q}{2g} \partial v_t - y = 0$.

$\frac{W}{4g} r \cdot \partial v_t - \left(q - \frac{q}{2g} \partial v_t\right) \cdot r = 0$.

Die erste giebt, weil y nicht Null sein kann,

$z = \frac{1}{2}\pi$; die dritte

$\partial v_t = 2g \frac{q}{q + \frac{1}{2}W}$;

und dann folgt aus der zweiten

$$y = W + \frac{W}{2q + W} q \quad \text{oder} \quad y = \frac{3q + W}{2q + W} \cdot W.$$

Das zweite Resultat liefert nun noch

$$v = 2g \frac{q}{q + \frac{1}{2}W} t \quad \text{und} \quad s = g \frac{q}{q + \frac{1}{2}W} t^2.$$

Wären blos die Vergleichungen zwischen s, t und v verlangt worden, so hätte sich, da die Bewegung hier offenbar eine gleichförmig beschleunigte werden muß und keine Reibung berücksichtigt wurde, der Werth von G sogleich unmittelbar aus §. 68. und §. 87. Beispiel 2. ergeben, indem die auf den Faden reducirte Masse des Cylinders $= \frac{1}{2}W$, also die bewegende Kraft $= q$; das Gewicht der bewegten Masse $= q + \frac{1}{2}W$; folglich

$$G = g \frac{q}{q + \frac{1}{2}W} \quad \text{und daher} \quad \partial v_t = 2G = 2g \frac{q}{q + \frac{1}{2}W} \quad \text{ist.}$$

§. 95.

Aufgabe.

Die Aufgabe bleibe die vorige, nur sei der Faden keine mathematische Linie, sondern ein Seil, welches in A beginnt, und in B anfänglich, mit der Länge b lothrecht, herabhängt; sein Querschnitt entspreche dem Halbmesser ϱ; jede Längen-Einheit desselben habe das Gewicht k, die centrische Linie desselben aber sei als diejenige anzusehen, in welcher seine Masse als vereint anzusehen ist, und $r + \varrho$ werde durch r' ausgedrückt, die übrige Bedeutung der Zeichen bleibe unverändert (Fig. 24.).

Wird unter p' die vom Seil-Element $\varrho^2 \pi \cdot r' d\varphi$ am Schluß der Zeit t, also im nächsten Augenblick dt gewonnene und daher in entgegengesetzter Richtung, vor Beginn der Zeit dt, als angebracht zu denkende, verlorene Kraft verstanden, so hat man

$$p' = \frac{r' \cdot k}{2g} \partial v_t \cdot d\varphi,$$

und es entstehen, wie im vorigen Paragraphen, die drei Gleichungen (vergleiche §. 76.)

$$1)\quad \Sigma[p \operatorname{Sin}\varphi] + \Sigma[p' \operatorname{Sin}\varphi] + y \operatorname{Cos} z = 0;$$

$$2)\quad \Sigma[p \operatorname{Cos}\varphi] + \Sigma[p' \operatorname{Cos}\varphi] + W + q + (b+s)k - [q+(b+s)k]\frac{\partial v_t}{2g} - y \operatorname{Sin} z = 0;$$

$$3)\quad \Sigma[px] + \Sigma[p' \cdot r'] - [q+(b+s)k - \frac{q+(b+s)k}{2g}\partial v_t]r' = 0,$$

in welchen unter p der Ausdruck $\frac{aw}{2gr'}\partial v_t x^2 dx d\varphi$ (§. 94.) zu verstehen ist. Es ergiebt sich aber hier

$$\Sigma(p \operatorname{Sin}\varphi) = 0; \quad \Sigma(p \operatorname{Cos}\varphi) = 0; \quad \Sigma(px) = \frac{W}{4g}\cdot\frac{r^2}{r'}\partial v_t;$$

$$\Sigma(p' \operatorname{Sin}\varphi) = \frac{r'k}{2g}\partial v_t \cdot \int_{\pi \div \frac{s}{r'}} \operatorname{Sin}\varphi\, d\varphi = \frac{r'k}{2g}\partial v_t\left(1 + \operatorname{Cos}\frac{s}{r'}\right);$$

$$\Sigma(p' \operatorname{Cos}\varphi) = \frac{r'k}{2g}\partial v_t \int_{\pi \div \frac{s}{r'}} \operatorname{Cos}\varphi\, d\varphi = -\frac{r'k}{2g}\partial v_t \cdot \operatorname{Sin}\frac{s}{r'};$$

$$\Sigma(p'r') = \frac{r'^2 \cdot k}{2g}\partial v_t \cdot \left[\pi - \frac{s}{r'}\right];$$

und die drei Gleichungen werden daher:

$$\frac{r'k}{2g}\left[1 + \operatorname{Cos}\frac{s}{r'}\right]\partial v_t + y \operatorname{Cos} z = 0;$$

$$W - \frac{r'k}{2g}\cdot \operatorname{Sin}\frac{s}{r'}\cdot \partial v_t + [q + bk + ks]\left[1 - \frac{\partial v_t}{2g}\right] - y \operatorname{Sin} z = 0;$$

$$\frac{W}{4g}\cdot\frac{r^2}{r'}\cdot\partial v_t + \frac{r'^2 \cdot k}{2g}\partial v_t\left[\pi - \frac{s}{r'}\right] - [q + bk + ks]\left[1 - \frac{\partial v_t}{2g}\right]r' = 0.$$

Aus der dritten entspringt, wenn die als constant vorausgesetzte ganze Länge $r'\pi + b$ der centrischen Linie des Seils $= l$, und $q + kl + \frac{W}{2}\cdot\left(\frac{r}{r'}\right)^2 = Q$ gesetzt wird,

$$\partial v_t = v \partial v_s = 2g\frac{q+kb+ks}{Q}, \text{ woraus}$$

$$v^2 = \frac{4g}{Q}[[q+kb]s+\tfrac{1}{2}k\cdot s^2]$$

und dann auch, wie in §. 67., die Vergleichung zwischen t und s, so wie die zwischen t und v folgt. Aus §. 68. und 87. hätte sich, weil keine Reibung angenommen ist, der Werth für ∂v_t sogleich unmittelbar ergeben.

Wird nun der Werth für ∂v_t in die erste und zweite gesetzt, so folgt

$$y \operatorname{Cos} z = -\frac{r'k}{Q}[q+kb+ks]\left[1+\operatorname{Cos}\frac{s}{r'}\right] \text{ und}$$

$$y \operatorname{Sin} z = W + \frac{q+kb+ks}{Q}\left[\left(r'\pi - s - r'\operatorname{Sin}\frac{s}{r'}\right)k + \frac{W}{2}\cdot\left(\frac{r}{r'}\right)^2\right]$$

woraus erhellet, daß z im Allgemeinen ein stumpfer Winkel ist, und durch Entwickelung sich die Werthe von z und y, so wie sie nach Durchlaufung des Weges s stattfinden werden, als Funktionen von s ergeben.

Ist A in B angekommen, und, wie vorausgesetzt, das Seil in A befestigt, so hört die untersuchte Bewegung auf und es tritt eine andere (pendelartige) ein. Sollen für den letzten Augenblick, wenn A in B angekommen ist, y, z und die Relation zwischen v und s aus den allgemeinen Gleichungen entnommen werden, so muß man $r'\pi$ für s setzen, und wird dann $q+(r'\pi+b)k$ durch q' ausgedrückt, so folgt

$$z = \frac{\pi}{2};\ y = W + \frac{q'}{Q}\left(\frac{r}{r'}\right)^2\cdot W \text{ und}$$

$$v^2 = \frac{4g}{Q}\left[q' - \frac{1}{2}r'\pi k\right]r'\pi .$$

§. 96.

Aufgabe.

Die Aufgabe bleibe die in §. 94., die Achse aber sei ein Cylinder zum Halbmesser ϱ, von der Länge b und dem Gewicht W' (jeder Cubikfuß wiege w'), und es soll der Widerstand der Zapfenreibung zum Coefficienten μ berücksichtigt, der Faden aber als gewichtlos angesehen bleiben.

Wird mit Beibehaltung der Zeichensprache in §. 94. die Welle mehr als Rolle, also a nur klein betrachtet, der beiderseits gleich lang hervorragende Zapfen aber als durchgehender voller Cylinder angesehen, so entsteht, wenn Σ sich auf die, einen hohlen Cylinder bildende Welle vom Gewicht W, und Σ' auf den Zapfen bezieht, x aber den Radius-Vector zum Winkel φ für Beide bezeichnet,

$$\text{für die Welle } p = \frac{a w}{2 g r} \partial v_t \cdot x^2 dx\, d\varphi \text{ und}$$

$$\text{für den Zapfen } p' = \frac{b w'}{2 g r} \partial v_t \cdot x^2 dx\, d\varphi$$

und die Bedingungs-Gleichung werden für den letzten Augenblick der Zeit t

$$1)\quad \Sigma(p \operatorname{Sin}\varphi) + \Sigma'(p' \operatorname{Sin}\varphi) + y \operatorname{Cos} z - \mu y \operatorname{Sin} z = 0;$$

$$2)\quad \Sigma(p \operatorname{Cos}\varphi) + \Sigma'(p' \operatorname{Cos}\varphi) + W + W' + q - \frac{q}{2g}\partial v_t - y \operatorname{Sin} z - \mu y \operatorname{Cos} z = 0;$$

$$3)\quad \Sigma(p x) + \Sigma'(p' x) + \mu y \cdot \varrho - \left(q - \frac{q}{2g}\partial v_t\right) \cdot r = 0.$$

Es ist aber

$$\Sigma(p \operatorname{Sin}\varphi) = 0;\quad \Sigma'(p' \operatorname{Sin}\varphi) = 0;\quad \Sigma(p \operatorname{Cos}\varphi) = 0;\quad \Sigma'(p' \operatorname{Cos}\varphi) = 0;$$

$$\Sigma(p x) = \frac{a w}{2 g r} \partial v_t \int_{r \div \varrho} \left[\int_{2\pi \div 0} d\varphi\right] x^3 dx = \frac{a w \pi}{g r} \partial v_t \cdot \frac{r^4 - \varrho^4}{4};$$

$$\Sigma'(p'x) = \frac{bw'}{2gr} \cdot \partial v_t \int_{\varrho \div 0} \left[\int_{2\pi \div 0} d\varphi \right] x^3 dx = \frac{bw'\pi}{gr} \partial v_t \cdot \frac{\varrho^4}{4},$$

und substituirt man diese Werthe in obige Gleichungen und schreibt

$$P \text{ für } q - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot \frac{\varrho}{r} [W + W' + q];$$

$$Q \text{ für } \frac{W}{2} \cdot \frac{r^2 + \varrho^2}{r^2} + \frac{W'}{2} \cdot \frac{\varrho^2}{r^2} + q - \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}} \cdot \frac{\varrho}{r} q,$$

so findet sich:

$$\operatorname{Cotg} z = \mu;$$

$$\partial v_t = 2g \frac{P}{Q} \text{ und}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}} \left[W + W' + q - q \cdot \frac{P}{Q} \right]$$

welche Resultate von t unabhängig, also constant sind.

VIII.

Anwendung der Variations-Rechnung auf eine Aufgabe der Mechanik.

§. 97.

Aufgabe.

Zwischen zwei gegebenen, in einer Vertical-Ebene liegenden Punkten A und B die Curve zu bestimmen, in welcher ein schwerer Punkt von dem höher liegenden Punkt A bis zu dem tiefer liegenden B, in der kürzesten Zeit T herabfällt (Fig. 25.).

Schneiden sich die verticale durch A und die horizontale durch B in C, ist $AC = a$ und $CB = b$ gegeben, wird A

als Anfangspunkt der Coordinaten, AC als die Achse X und die Horizontale aus A als die Achse Y gewählt, und ist der Atom in der Zeit t von A (ohne Anfangsgeschwindigkeit) bis D gefallen und hat den, den Coordinaten x, y zugehörigen Bogen $AD = s$ durchlaufen und am Ende dieser Zeit t die Geschwindigkeit v erlangt, so ist, unter φ den Winkel verstanden, welchen die Tangente der Curve in D mit dem Horizont bildet, $\partial v_t = 2g \operatorname{Sin} \varphi$ und $\partial s_t = v$. Es ist aber $\operatorname{Sin} \varphi = \partial x_s$ und $\partial v_t = \partial v_s \cdot \partial s_t = v \partial v_s$; folglich wird die erste Gleichung: $v \partial v_s = 2g \partial x_s$, und hieraus folgt, weil x und v zugleich anfangen, $v^2 = 4gx$, (wie auch aus §. 73. und 84. schon hervorgegangen wäre), also, diesen Werth für v in $\partial s_t = v$ substituirt, und $\partial s_x \cdot \partial x_t$ für ∂s_t, zugleich auch, $\sqrt{1 + \partial y_x^2}$ für ∂s_x (§. 46.) gesetzt,

$$\sqrt{1 + \partial y_x^2} \cdot \partial x_t = 2\sqrt{g} \cdot \sqrt{x}, \text{ woraus}$$

$$\partial t_x = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{\sqrt{x}}; \text{ also}$$

$$t = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int \frac{\sqrt{1 + \partial y_x^2}}{\sqrt{x}} dx;$$

daher, wenn nach §. 63. z für ∂y_x geschrieben wird,

$$T = \frac{1}{2\sqrt{g}} \cdot \int_{a \div 0} \sqrt{\frac{1 + z^2}{x}} dx$$

folgt, und nun die Relation zwischen x und y zu bestimmen ist, für welche T ein Minimum wird. Es ist aber hier

$$u = \sqrt{\frac{1 + z^2}{x}} \text{ (§. 63.); also}$$

$$\partial u_y = 0 \text{ und } \partial u_z = \frac{\partial y_x}{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \partial y_x^2}}$$

und die allgemeine Bedingungs-Gleichung $\partial u_y - \partial(\partial u_z)_x = 0$ geht hier über in

$$\partial\left[\frac{\partial y_x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}}\right]_x = 0 \;; \text{ woraus}$$

$$\frac{\partial y_x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}} = \text{Const}$$

folgt, welche Constante durch $\frac{1}{\sqrt{2r}}$ ausgedrückt werden soll, wodurch der Calcül etwas bequemer wird. Aus der Gleichung

$$\frac{\partial y_x}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{1+\partial y_x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2r}} \text{ folgt nun}$$

$$\partial y_x = \sqrt{\frac{x}{2r-x}} = \frac{x}{\sqrt{2rx-x^2}} \;; \text{ also}$$

$$y = \int \frac{x}{\sqrt{2rx-x^2}} dx$$

und hieraus nach §. 28., 11. und 9.

$$y = -\sqrt{2rx-x^2} + r \operatorname{Arc\,Sin} \frac{x-r}{r} + \text{Const}$$

oder, weil x und y zugleich anfangen sollen,

$$y = -\sqrt{2rx-x^2} + r \operatorname{Arc\,Cos} \frac{r-x}{r},$$

welches die verlangte Gleichung ist, und die gemeine ebene Cycloide (§. 57.) ausdrückt, wenn Fig. 15., F als Anfangspunkt der Coordinaten, FB als Achse Y und die Normale in F auf BF als Achse X angenommen wird, die noch zu bestimmende Constante 2r aber den Durchmesser des erzeugenden Kreises bezeichnet.

Die Bestimmung der Constante r geht aus der Bedingung hervor, daß y = b werden soll, wenn x = a ist, und es muß daher r aus der transcendenten Gleichung

$$b = -\sqrt{2ra-a^2} + r\cdot\operatorname{Arc\,Cos}\frac{r-a}{r}$$

entnommen werden, wenn a und b willkührlich angenommen sind. Wählt man a und b im Verhältniß von 2 zu π, so

daß man $a = 2 \cdot r$, $b = \pi \cdot r$ setzen kann, so geschieht dieser Gleichung für jeden Werth von r Genüge, und für diese Wahl wird B der Scheitelpunkt (A Fig. 15.) und A der Durchschnittspunkt (F Fig. 15.) der Cycloide mit der Bahn.

Die Zeit T des Falles selbst durch diese halbe gemeine Cycloide AB ergiebt sich nun leicht aus

$$T = \frac{1}{2\sqrt{g}} \int_{2r \div 0} \sqrt{\frac{1 + \partial y_x^2}{x}}\, dx\,, \quad \text{nämlich}$$

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{2g}}$$

(vergleiche das annähernde Resultat für den Kreisbogen §. 84.).

Denkt man sich die gerade Linie von A nach B, so ergiebt sich die Zeit T′ des Falles auf ihr, nach §. 72.,

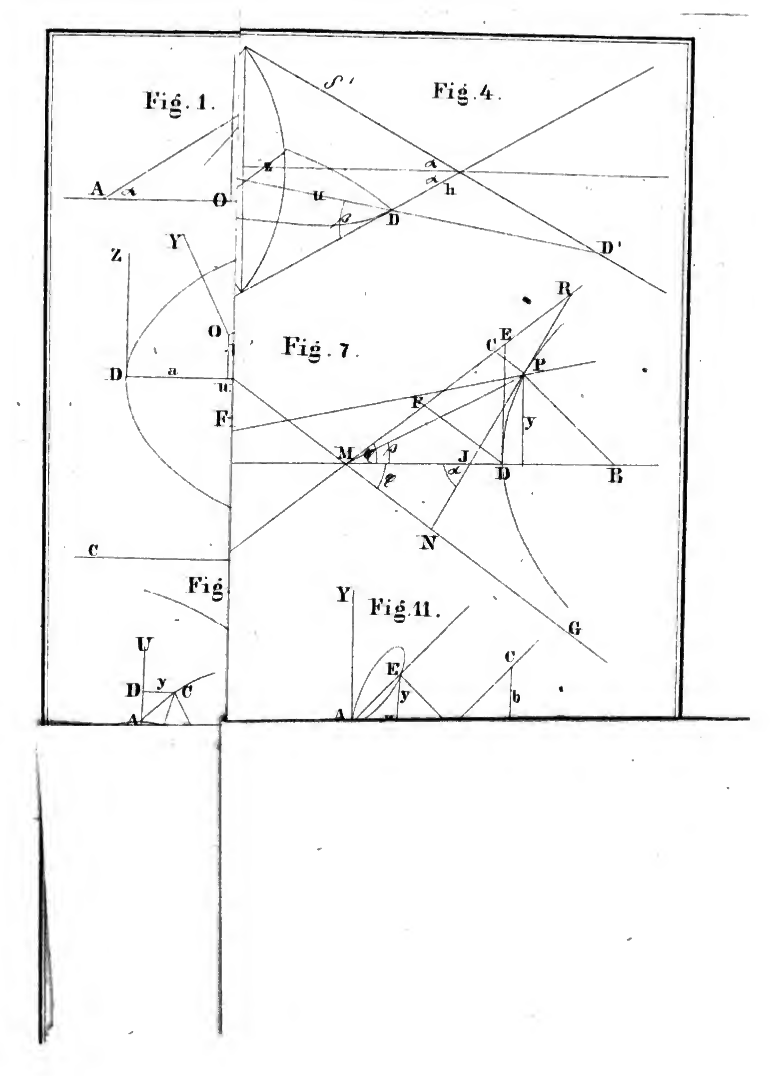
$$= \sqrt{\pi^2 + 4} \cdot \sqrt{\frac{r}{2g}}$$

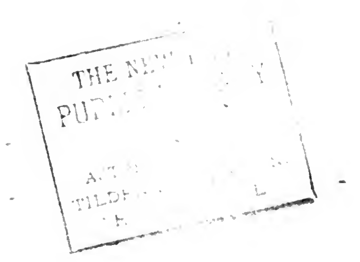
und es verhält sich somit

$$T : T' = \pi : \sqrt{\pi^2 + 4}\ .$$

Zu bemerken ist hier noch und leicht nachzuweisen, daß, wenn man den Atom auf dieser halben Cycloide von jedem beliebigen, zwischen A und B liegenden, Punkt D aus ohne Anfangsgeschwindigkeit von D bis B herabfallen läßt, die erforderliche Zeit allemal dieselbe, nämlich $= \pi \cdot \sqrt{\frac{r}{2g}}$ ist, weshalb diese Cycloide auch tautochronisch oder isochronisch genannt wird.

Gedruckt bei J. Petsch in Berlin.


Fig. 1.
A
O
Fig. 4.
h
u
D
D'
Z
Y
O
Fig. 7.
D
a
u
F
R
C
E
P
F
y
M
J
D
B
N
C
Fig
G
Y
Fig. 11.
U
D
y
C
A
E
y
C
b
A



Gedruckt bei J. Petsch in Berlin.





